Math. P.

Bobek

43 nc

EINLEITUNG

IN DIE

PROJEKTIVISCHE GEOMETRIE DER EBENE.

EIN LEHRBUCH FÜR HÖHERE LEHRANSTALTEN

UND FÜR DEN SELBSTUNTERRICHT.

NACH DEN VORTRÄGEN DES HERRN C. KÜPPER

BEARBEITET VON

DR. KARL BOBEK.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1889.

217

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist eine Bearbeitung der Vorträge, welche Herr Professor C. Küpper seit dem Jahre 1867 an der Prager technischen Hochschule über Geometrie der Lage gehalten hat.

Diesem Gegenstande ist am genannten Institute blos eine Stunde wöchentlich zugewiesen, und die Vorträge mussten demgemäss so eingerichtet werden, dass sie trotz der knapp bemessenen Zeit den Techniker in das Gebiet der projektivischen Geometrie einführen. Aber auch den Lehramtscandidaten sollten sie die Grundlage für das weitere Studium der Geometrie liefern, da an der Hochschule keine besondere Abtheilung für dieselben besteht. Es wurden daher die Constructionen, sowie die Sätze in möglichst conciser Weise zusammengefasst und so dargestellt, dass sie für reelle sowie für imaginäre Elemente gleiche Geltung behalten, wodurch der so häufig auftretende und nicht gerechtfertigte Unterschied zwischen dem Imaginären und Reellen, wenigstens in den Elementen, vollständig verschwindet.

Bei den Vorträgen war es üblich, dass nicht der ganze im vorliegenden Buche enthaltene Stoff jährlich erschöpft wurde, sondern dass je nachdem Zeit und Umstände es verlangten, abwechselnd einzelne Theile der letzten drei Kapitel weggelassen wurden.

Der Verfasser war bestrebt, die Strenge und Klarheit der Vorträge, unbeschadet ihrer Kürze, wiederzugeben. Bei dem Studium können der § 7 des III. Kapitels und ebenso alle auf die metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte Bezug habenden Paragraphen, ohne Nachtheil für das Folgende, weggelassen werden. Die letzteren dürften aber als Be-

rührungspunkte mit der analytischen Geometrie, wie sie an den Mittelschulen gelehrt wird, dem Studierenden immerhin sehr erwünscht sein. Sollten die Curven dritter Ordnung im VIII. Kapitel zu knapp behandelt erscheinen, so möge hier besonders hervorgehoben werden, dass es nicht beabsichtigt ist, daselbst eine Einleitung in die Theorie dieser Curven zu geben; es soll nur zum weiteren Studium angeregt werden, was wol am Besten dadurch zu erreichen ist, dass der Lernende gezwungen wird, über das Gelesene nachzudenken. Es sei in dieser Beziehung besonders auf den § 4 dieses Kapitels hingewiesen, in welchem eine vollständig geometrische Begründung der Polarentheorie für die Curven dritter Ordnung gegeben wird.

Prag, Oktober 1889.

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel.

Seite

§ 1. Definitionen 1
§ 2. Sätze über projektivische Gebilde. 3
§ 3. Die Involution. 13

II. Kapitel.

§ 1. Die collineare Verwandtschaft zweier ebener Systeme. . . 25
§ 2. Die v. Staudt'sche Definition der Collineation 28
§ 3. Specielle Lage collinearer Systeme in derselben Ebene . . 30

III. Kapitel.

§ 1. Die Centralprojektion des Kreises. 37
§ 2. Construktion des Kegelschnittes durch seine Punkte . . . 40
§ 3. Construktion des Kegelschnittes durch seine Tangenten . . 45
§ 4. Projektivische Gebilde auf dem Kegelschnitte 49
§ 5. Die Involution auf dem Kegelschnitte 53
§ 6. Pol und Polare 58
§ 7. Die Poldreiecke eines Kegelschnittes 62

IV. Kapitel.

§ 1. Construktion des Kegelschnittes aus imaginären Bestimmungsstücken 67
§ 2. Die adjungirte Involution. 75
§ 3. Die imaginären Elemente 81
§ 4. Das Polarsystem. 87
§ 5. Polarfiguren. 96
§ 6. Classification der Kegelschnitte 97
§ 7. Die Reciprocität. 100

V. Kapitel.

§ 1. Die Hauptpunkte einer Collineation. 107
§ 2. Das zwei Polarsystemen gemeinsame Poldreieck 111
§ 3. Die Steiner'sche Verwandtschaft 114
§ 4. Die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte 118

Seite

§ 5. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte . . 122
§ 6. Die gegenseitige Lage zweier Kegelschnitte 123
§ 7. Aufgaben betreffend zwei Kegelschnitte 126

VI. Kapitel.

§ 1. Der Kegelschnittbüschel 129
§ 2. Die Kegelschnittschaar. 140
§ 3. Kegelschnitte in doppelter Berührung 141
§ 4. Die Brennpunkte der Kegelschnitte 148
§ 5. Die Faure'schen Polkreise 156

VII. Kapitel.

§ 1. Projektivität im Kegelschnittbüschel 160
§ 2. Das Kegelschnittnetz. 166
§ 3. Betrachtungen an zwei Kegelschnittbüscheln, die nicht in einem Netze liegen 169
§ 4. Die biquadratische und cubische Involution 175

VIII. Kapitel.

§ 1. Erzeugung der Curven dritter Ordnung 179
§ 2. Der Curvenbüschel dritter Ordnung 187
§ 3. Sätze über Curven dritter Ordnung 193
§ 4. Das Netz conischer Polaren einer Curve dritter Ordnung . 200

Druckfehler:

Seite 11 Zeile 2 v. o. l.: wenn sie *nicht* identisch sind
„ 18 „ 11 v. o. l.: *liegen* statt liegt
„ 22 „ 11 v. o. l.: $\overline{ca}$ statt $\overline{\mathfrak{c}a}$
„ 23 „ 12 u. 13 v. o. l.: *Elementen* statt Punkten
„ 29 „ 11 v. u. l.: von $|X|$ *und* $|X'|$
„ 40 „ 6 v. u. l.: K statt $\mathfrak{K}$
„ 65 „ 13 v. o. l.: $\mathfrak{m}$ statt m
„ 130 „ 13 v. o. l.: 84 statt 80
„ 183 „ 14 v. u. l.: zwei *ihm* projektivische
„ 186 „ 2 v. o. l.: in den drei *entsprechenden* Punkten
„ 190 „ 12 v. o. l.: die Schnittpunkte *von*

I. Kapitel.

Definitionen. — Projektivität. — Involution.

§ 1. Definitionen.

Definition 1. Die Gesammtheit der Punkte und Geraden einer Ebene nennt man ein *ebenes System*. Die Ebene selbst heisst *Träger* des ebenen Systems.

2. Die Gesammtheit der Punkte einer Geraden heisst *gerades Gebilde*. Die Gerade selbst wird *Träger* des geraden Gebildes genannt. Die Punkte heissen auch Elemente des geraden Gebildes.

3. Die Gesammtheit der Strahlen, die durch einen Punkt in einer Ebene gehen, heisst *Strahlenbüschel*, der Punkt selbst wird als *Träger* oder *Scheitel* des Strahlenbüschels bezeichnet. Die Strahlen heissen auch Elemente des Strahlenbüschels.

4. Die Gesammtheit der Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, nennt man *Ebenenbüschel*, die Gerade wird *Träger* dieses Büschels oder *Axe* desselben genannt. Die Ebenen heissen auch Elemente des Ebenenbüschels.

5. Ein Strahlenbüschel schneidet jede Gerade seiner Ebene, die nicht durch seinen Scheitel geht, in einem geraden Gebilde. Dieses heisst der *Schnitt* des Strahlenbüschels mit der Geraden.

6. Ein gerades Gebilde wird aus einem beliebigen Punkte, der nicht auf dem Träger desselben liegt, durch einen Strahlenbüschel projicirt. Der Strahlenbüschel wird die *Projektion* oder der *Schein* des geraden Gebildes genannt.

7. Jede Ebene wird von einem Ebenenbüschel, dem sie nicht angehört, in einem Strahlenbüschel geschnitten, dessen Scheitel der Schnittpunkt der Axe mit der Ebene ist. Hieraus

folgt, dass jede Gerade, welche die Axe des Ebenenbüschels nicht schneidet, von diesem in einem geraden Gebilde geschnitten wird. Der Strahlenbüschel resp. das gerade Gebilde heisst *Schnitt* des Ebenenbüschels.

8. Umgekehrt wird jedes gerade Gebilde aus einer Axe, die den Träger jenes nicht schneidet, durch einen Ebenenbüschel projicirt. Ebenso wird ein Strahlenbüschel aus einer Axe, die durch seinen Scheitel geht, aber nicht in seiner Ebene liegt, durch einen Ebenenbüschel projicirt. Der Ebenenbüschel heisst *Projektion* oder *Schein* des geraden Gebildes resp. des Strahlenbüschels.

9. Sind zwei gerade Gebilde Schnitte desselben Strahlenbüschels, so sagt man, die geraden Gebilde liegen *perspektivisch.* Die Punkte, welche auf demselben Strahle liegen, mögen einander *entsprechende* oder *homologe* Punkte genannt werden. Die Beziehung, in welche die beiden geraden Gebilde durch die homologen Punkte zu einander gebracht werden, heisst *Projektivität.* Man sagt die beiden geraden Gebilde sind *in Anbetracht der homologen Punkte projektivisch.*

Man beachte, dass im Schnittpunkte der obigen Träger der geraden Gebilde zwei homologe Punkte liegen.

10. Sind zwei Strahlenbüschel Scheine desselben geraden Gebildes, so sagt man, die Strahlenbüschel liegen *perspektivisch.* Die Strahlen, welche denselben Punkt des geraden Gebildes projiciren, mögen einander *entsprechende oder homologe* Strahlen heissen. *In Anbetracht der homologen Strahlen nennen wir die Strahlenbüschel projektivisch.*

Man beachte, dass in dem Strahle, welcher beide Scheitel der Büschel enthält, zwei homologe Strahlen liegen.

11. Ein gerades Gebilde, welches der Schnitt eines Strahlenbüschels ist, heisst zum letzteren *perspektivisch.* Wird jedem Strahl des Büschels der Punkt des geraden Gebildes als homolog zugewiesen, welcher auf dem Strahle liegt, so heissen der Strahlenbüschel und das gerade Gebilde *in Anbetracht der homologen Elemente projektivisch.*

Die Definitionen der Projektivität für den Ebenenbüschel sind durch 7 und 9 oder 10 festgestellt.

12. Die Beziehung der Projektivität betrachten wir als von der gegenseitigen Lage der Gebilde unabhängig. Wir erlauben uns eines oder beide Gebilde beliebig im Raume zu verschieben, ohne dass wir dadurch die Projektivität gestört ansehen, wenn wir nur dieselben Elemente, als einander zugewiesen, festhalten.

§ 2. Sätze über projektivische Gebilde.

Lehrsatz 1. *Zwei projektivische gerade Gebilde können stets in perspektivische Lage dadurch gebracht werden, dass man in den Schnittpunkt beider Träger zwei homologe Punkte vereinigt.*

Seien die Geraden G und G' die Träger der geraden Gebilde $|a, b, c, d, \ldots|$ und $|a', b', c', d' \ldots|$, welche auf denselben von dem Strahlenbüschel (t), dessen Scheitel t ist, ausgeschnitten werden, so dass a, a'; b, b'; c, c'; $d, d' \ldots$ auf demselben Strahle liegen, und daher die geraden Gebilde auf G und G', die wir mit $|G|$ und $|G'|$ bezeichnen wollen, in Anbetracht dieser homologen Punkte projektivisch sind. Der obige Satz sagt nun aus, wie immer wir G und G' aneinander legen, sobald im Schnittpunkt beider zwei homologe Punkte vereinigt liegen, so liegen $|G|$ und $|G'|$ perspektivisch d. h. die Verbindungsgeraden homologer Punkte gehen durch einen festen Punkt.

Denken wir uns das Gebilde G' so aus der Zeichenebene in den Raum gelegt, dass der Punkt a' auf a fällt und die Punkte $b', c', d' \ldots$ nach b_1', c_1', d_1' gelangen, so lässt sich zeigen, dass $\overline{bb_1'}, \overline{cc_1'}, \overline{dd_1'} \ldots$ durch einen Punkt gehen. Denn ist $\mathfrak{G}$ zu G' durch a parallel gezogen und schneiden $\overline{tb}, \overline{tc}, \overline{td} \ldots$ diese in $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, so sind die Geraden $\overline{\mathfrak{b}b_1'}, \overline{\mathfrak{c}c_1'}, \overline{\mathfrak{d}d_1'} \ldots$ zu einander parallel, wie aus der Proportionalität der Abschnitte auf $\mathfrak{G}$ und G_1' folgt. Zieht man also aus t die Gerade T parallel zu diesen Strahlen, so ist dieselbe Axe des Ebenenbüschels, welcher die Punkte $b_1'\mathfrak{b}, c_1'\mathfrak{c}, d_1'\mathfrak{d} \ldots$ gleichzeitig projicirt und dessen Ebenen daher G in den Punkten $b, c, d \ldots$ schneiden. Ist mithin s der Schnittpunkt von T mit der Ebene der Geraden G und

Fig. 1.

G_1' so gehen die Strahlen $\overline{b_1'b}$, $\overline{c_1'c}$, $\overline{d_1'd}$ . . . alle durch s d. h. $|G|$ und $|G_1'|$ liegen perspektivisch.

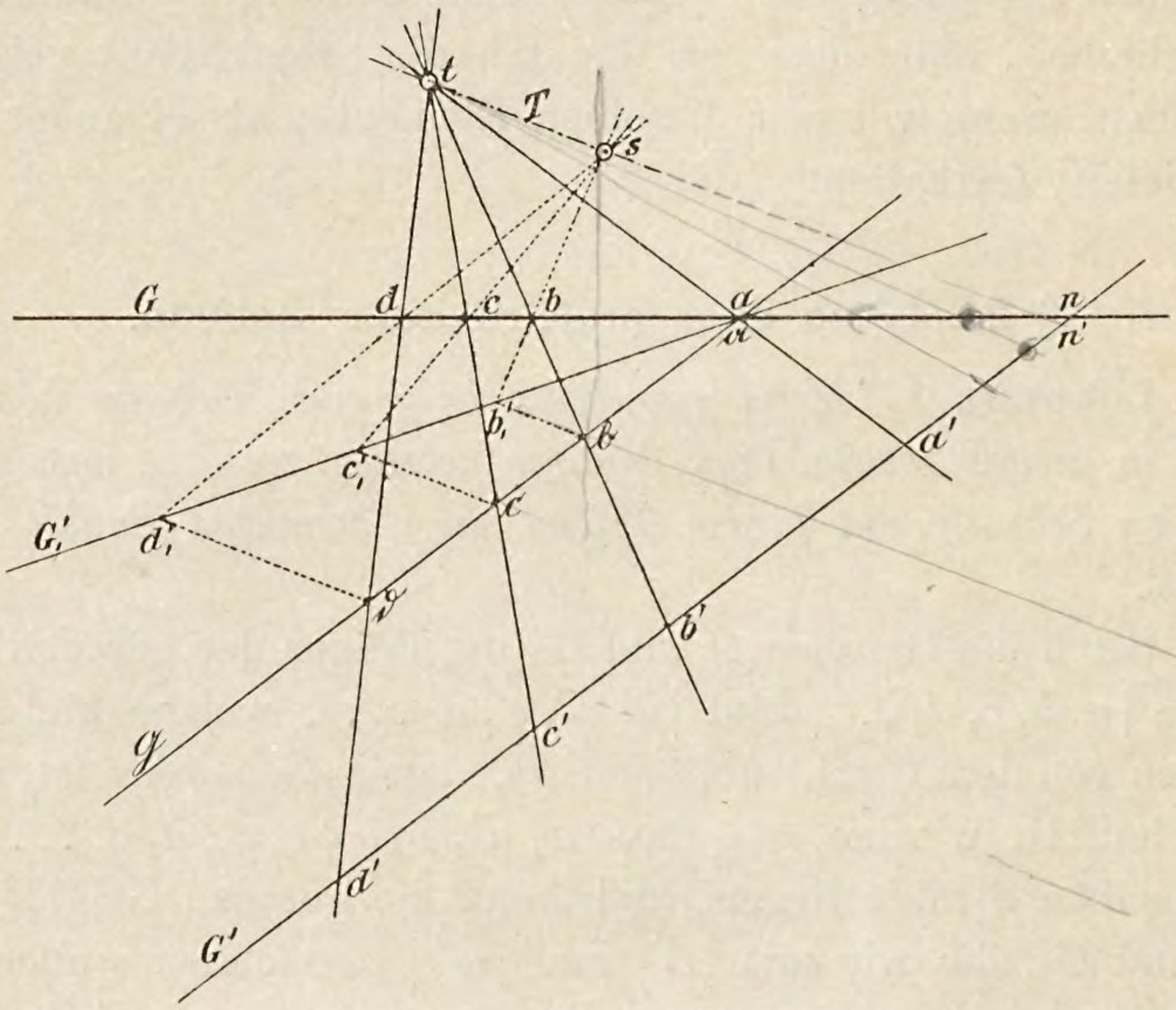


Fig. 1.

Folgerung 1. Beschreibt der Punkt a das gerade Gebilde $|G|$ in stetiger Weise, ohne den Sinn seiner Bewegung zu ändern, so beschreibt auch der homologe Punkt a' das Gebilde $|G'|$ in stetiger Weise, ohne seinen Sinn zu ändern. Es können nämlich $|G|$ und $|G'|$ als Schnitte *eines* Strahlenbüschels betrachtet werden, dessen Strahlen $\overline{aa'}$ den Büschel in einem Sinne beschreiben, der sich nicht ändert, so lange der Sinn von a es nicht thut.

Fig. 2. Seien $|G|$ und $|G'|$ in perspektivischer Lage und t das Perspektivitätscentrum, $\mathfrak{A}$ der Strahl von (t), welcher in a und a' schneidet, so wird, wenn a das Gebilde auf G im Sinne des Pfeiles 1 beschreibt, a' das Gebilde auf G' im Sinne des Pfeiles 2 durchlaufen. Sei $\mathfrak{G}$ die durch t zu G gezogene Parallele, welche G' in u' schneiden möge. Je weiter der Punkt a auf G in der Richtung des Pfeiles 1 hinausrückt, desto näher rückt offenbar a' an u' und wir wollen sagen der Punkt u' entspricht dem Punkte u_∞ von G, in welchem $\mathfrak{G}$ die G schneidet, supponiren also, dass G von der Parallelen

$\mathfrak{G}$ in *einem* Punkte geschnitten wird, den wir den *unendlich fernen Punkt* von G nennen.

Rückt nun a' über u' in demselben Sinne des Pfeiles 2 weiter nach b', so wird der Strahl $\mathfrak{B}$ wieder auf G den Punkt b ausschneiden und zwar durchläuft nun b das Gebilde auf G noch fortwährend in demselben Sinne. Durch die Annahme des Punktes u_∞ ist es also möglich, das Gebilde auf G von einem Punkte a ganz beschreiben zu lassen, ohne dass er seinen Sinn ändert, das Gebilde auf G ist also ein vollständig zusammenhängendes.

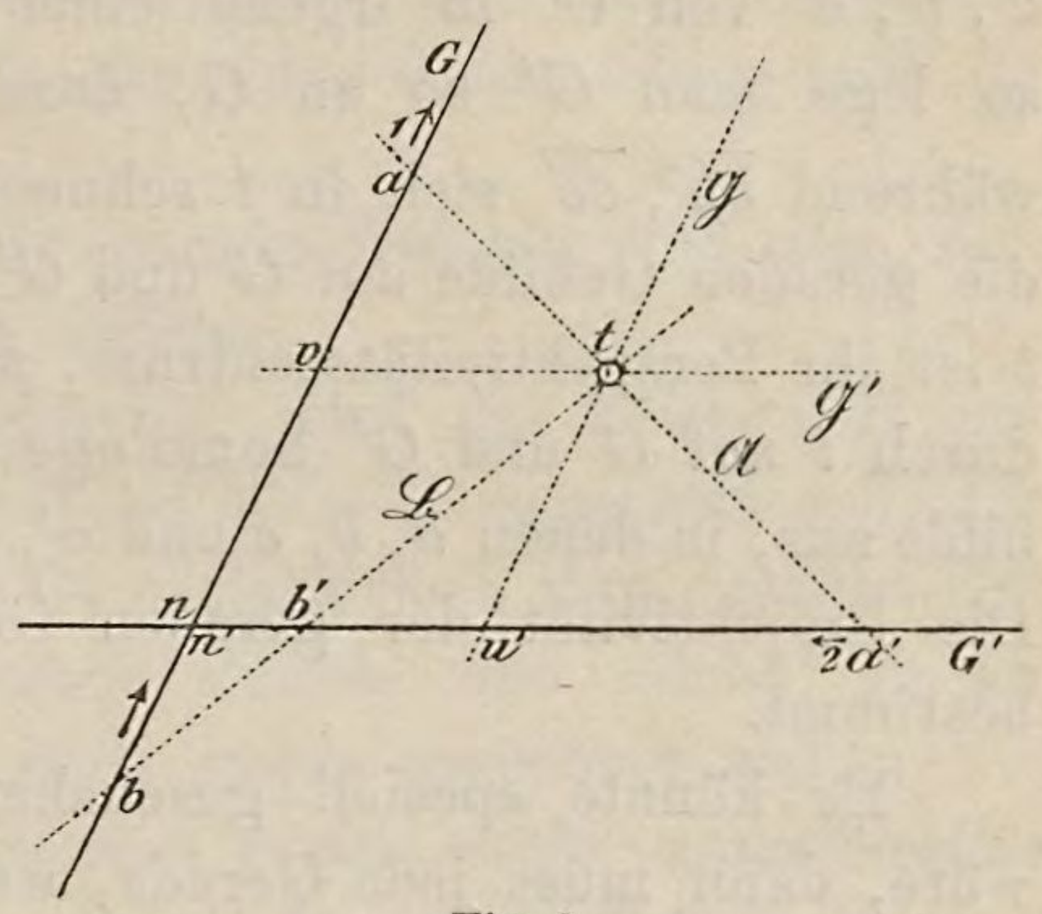


Fig. 2.

Schneidet die Gerade $\mathfrak{G}'$ parallel zu G' die G in v, so ist offenbar v der homologe Punkt des unendlich fernen Punktes v'_∞ von G'.

Durch die obige Festsetzung haben wir jeder Geraden *einen* unendlich fernen Punkt zugeschrieben, in welchem sie von allen zu ihr parallelen Geraden geschnitten wird. Wir wollen diesen Punkt auch die *Richtung* der Geraden nennen und die Geraden der Ebene, welche dieselbe Richtung haben, als einen *Parallelstrahlenbüschel* bezeichnen.

Anmerkung. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke avt und $tu'a'$ der Figur 2 folgt

$$va \,.\, u'a' = vt \,.\, u't \qquad (1)$$

d. h. das Produkt $va \,.\, u'a'$ hat einen constanten Wert, wenn a, a' zwei projektivische gerade Gebilde durchlaufen, in denen v und u' den unendlich fernen Punkten v'_∞ und u_∞ entsprechen.

2. Zwei projektivische gerade Gebilde liegen stets perspektivisch, sobald im Schnittpunkte ihrer Träger zwei homologe Punkte vereinigt liegen.

3. Sollen zwei gerade Gebilde projektivisch gemacht werden, so kann man drei Punkten des einen drei beliebige

Punkte des anderen zuweisen, wodurch dann die Projektivität vollständig bestimmt ist.

Denn sollen den Punkten a, b, c von G die Punkte a', b', c' von G' in irgend einer Projektivität entsprechen, so lege man G' so an G, dass a' mit a zusammenfällt, während $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ sich in t schneiden mögen. Dann müssen die geraden Gebilde auf G und G' perspektivisch liegen, und t ist ihr Perspektivitätscentrum, also schneiden die Strahlen durch t auf G und G' homologe Punkte projektivischer Gebilde aus, in denen a, b, c und a', b', c' einander entsprechen. Die Projektivität der geraden Gebilde ist also vollständig bestimmt.

Es könnte speciell geschehen, dass $\overline{bb'}$ zu $\overline{cc'}$ parallel wäre, dann muss jede Gerade, welche homologe Punkte von G und G' mit einander verbindet, zu $\overline{bb'}$ parallel sein. Denn würde $\overline{dd'}$ dieselbe in t schneiden, so wäre t das Perspektivitätscentrum, also müsste auch $\overline{cc'}$ durch t gehen. Der Parallelstrahlenbüschel von der Richtung $\overline{bb'}$ schneidet also dann auf G und G' die homologen Punkte der projektivischen geraden Gebilde aus. In den projektivischen Gebilden entsprechen einander die unendlich fernen Punkte. Die obige Relation (1) nimmt die Form:

$$\frac{bc}{b'c'} = \text{Const.} \tag{2}$$

an, wie aus den ähnlichen Dreiecken abb', acc', add', ... ohne Weiteres folgt.

Umgekehrt sind zwei gerade Gebilde so projektivisch auf einander bezogen, dass die unendlich fernen Punkte homolog sind, und werden dieselben in perspektivische Lage gebracht, ohne dass ihre Träger einander parallel sind, dann müssen die Verbindungsgeraden homologer Punkte zu einander parallel sein und es findet mithin die Beziehung (2) statt. Legt man aber die Geraden, welche die projektivischen geraden Gebilde tragen, zu einander parallel, dann gehen die Verbindungslinien homologer Punkte *i. A.* durch einen im Endlichen gelegenen Punkt t.

Derartig auf einander bezogene gerade Gebilde nennt man

ähnlich. In dem speciellen Falle, dass $bc = b'c'$ ist, d. h. die Const. $= 1$ in der Beziehung (2) wird, heissen die Gebilde *congruent*. Legt man die Geraden, welche sie tragen, zu einander parallel, so sind die Verbindungsgeraden homologer Punkte zu einander parallel, der obige Punkt t liegt auch im Unendlichen.

Congruente und *ähnliche* gerade Gebilde sind also specielle projektivische gerade Gebilde.

Als Zeichen der Projektivität wird das Zeichen $\overline{\wedge}$ gewählt. So dass $|abcd\ldots| \overline{\wedge} |a'b'c'd'\ldots|$ heissen soll: das gerade Gebilde $|abcd\ldots|$ ist projektivisch zum geraden Gebilde $|a'b'c'd'\ldots|$. Homologe Punkte sind solche, die an derselben Stelle von links nach rechts gerechnet stehen.

Lehrsatz 2. *Hat man zwei projektivische gerade Gebilde* $|abcd\ldots|$ *und* $|a'b'c'd'\ldots|$ *auf demselben Träger* G, *von welchen zwei entsprechende Elemente in einem Punkte des Trägers* $a = a'$ *coïncidiren, so gibt es noch einen zweiten Punkt* $x = x'$, *in welchem zwei homologe Punkte sich decken.*

Wir wollen solche sich deckende homologe Elemente projektivischer Gebilde *Deckelemente* nennen.

Denkt man das gerade Gebilde $|a'b'c'd'\ldots|$ unter Fest- Fig. 3.
haltung des Punktes $a = a'$ um irgend einen Winkel nach

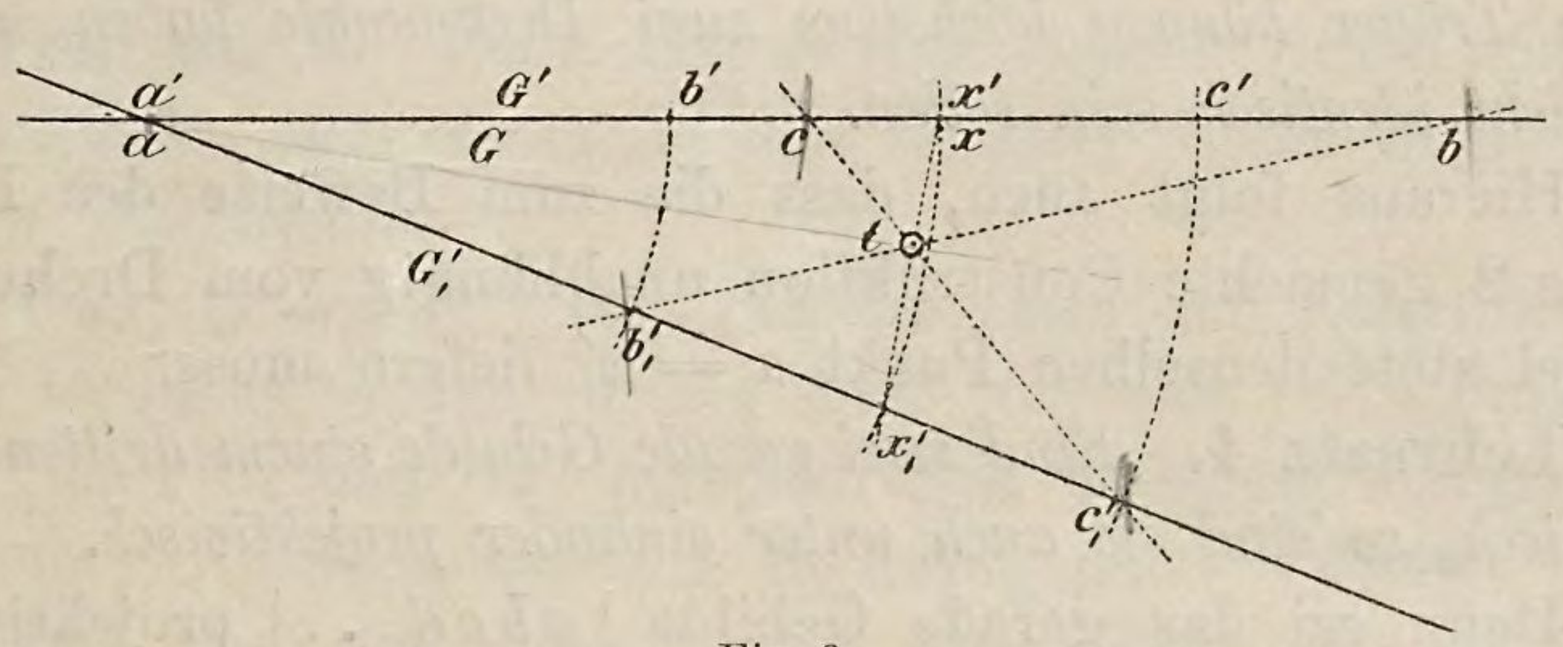


Fig. 3.

G_1' gedreht, so dass seine Lage G_1' $|a'b_1'c_1'd_1'\ldots|$ wird, so gehen die Geraden $\overline{bb_1'}$, $\overline{cc_1'}$, $\overline{dd_1'}$ ... durch einen festen Punkt t der Ebene. Zieht man durch t den Strahl, welcher auf der Winkelhalbirenden des obigen Drehungswinkels senkrecht steht, so schneidet er G_1' in x_1' und G in x, so dass $ax_1' = ax$ wird, dass also bei der Rückdrehung von G_1' in G' der Punkt x' mit x coïncidirt.

Es könnte geschehen, dass die Senkrechte auf die Winkelhalbirende durch den Punkt a ginge, so dass x und x_1' in a fallen, dann ist a als ein doppeltes Deckelement anzusehen.

Lehrsatz 3. *Liegen zwei projektivische gerade Gebilde auf demselben Träger G und geschieht es dreimal, dass ein Punkt mit seinem homologen zusammenfällt, so coïncidirt jeder Punkt mit seinem homologen, oder die beiden geraden Gebilde sind identisch (congruent).*

Fig. 4. Denn dreht man das eine Gebilde G' um den Punkt $a = a'$ in die Lage $G_1' \mid a' b_1' c_1' d_1' \mid$, so werden, da

$$ab = ab_1' \quad ac = ac_1', \quad ad = ad_1' \ldots$$

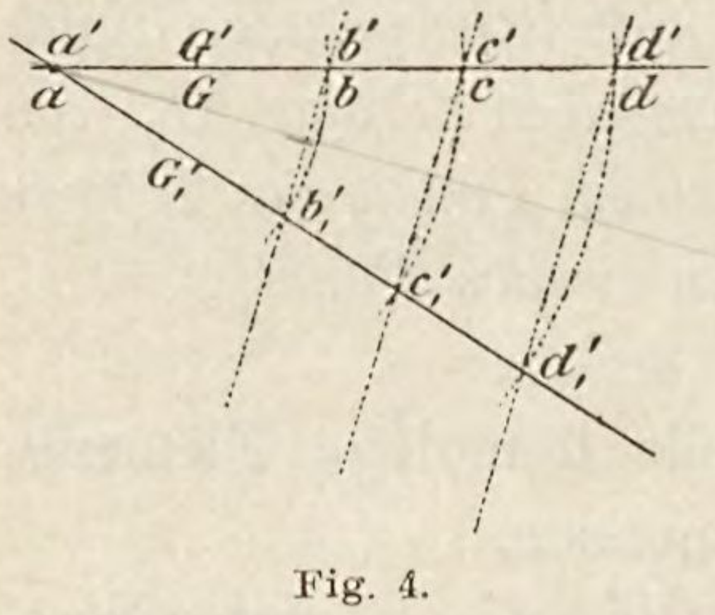


Fig. 4.

ist, die Geraden $\overline{bb_1'}, \overline{cc_1'}, \overline{dd_1'} \ldots$ parallel und senkrecht zur Halbirungslinie des Drehungswinkels, also schneidet jeder Stral dieses Parallelstrahlenbüschels die G und G_1' in den Punkten x und x_1' so, dass $ax = ax_1'$ ist, dass also bei der Rückdrehung x mit x' coïncidirt.

Folgerung 1. *Zwei projektivische gerade Gebilde auf demselben Träger können höchstens zwei Deckpunkte haben, wenn sie nicht identisch sein sollen.*

Hieraus folgt auch, dass die zum Beweise des Lehrsatzes 2 gemachte Construktion unabhängig vom Drehungswinkel stets denselben Punkt $x = x'$ liefern muss.

Lehrsatz 4. *Sind zwei gerade Gebilde einem dritten projektivisch, so sind sie auch unter einander projektivisch.*

Fig. 5. Denn sei das gerade Gebilde $| a b c d \ldots |$ projektivisch zu $| \mathfrak{a} \mathfrak{b} \mathfrak{c} \mathfrak{d} \ldots |$ und dieses zu $| a' b' c' d' \ldots |$, so lege man die Träger G, $\mathfrak{G}$, G' derselben so im Raume aneinander, dass sie die Kanten einer dreiseitigen körperlichen Ecke bilden, in deren Scheitel die drei Punkte a, $\mathfrak{a}$, a' vereinigt liegen. Zu Folge des Lehrsatzes 1 liegen daher $| G |$ und $| \mathfrak{G} |$, sowie auch $| \mathfrak{G} |$ und $| G' |$, perspektivisch. Es gehen mithin die Geraden $\overline{b\mathfrak{b}}$, $\overline{c\mathfrak{c}}$, $\overline{d\mathfrak{d}} \ldots$ durch einen Punkt s und die Geraden $\overline{\mathfrak{b}b'}$, $\overline{\mathfrak{c}c'}$, $\overline{\mathfrak{d}d'} \ldots$ durch einen Punkt s'. Die Gerade $\overline{ss'}$ ist

mithin die Axe eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen durch je drei der Punkte $b\mathfrak{b}b'$, $cc c'$, $d\mathfrak{d}d'$ ... gehen und dieser schneidet daher die Ebene der Geraden G und G' in einem

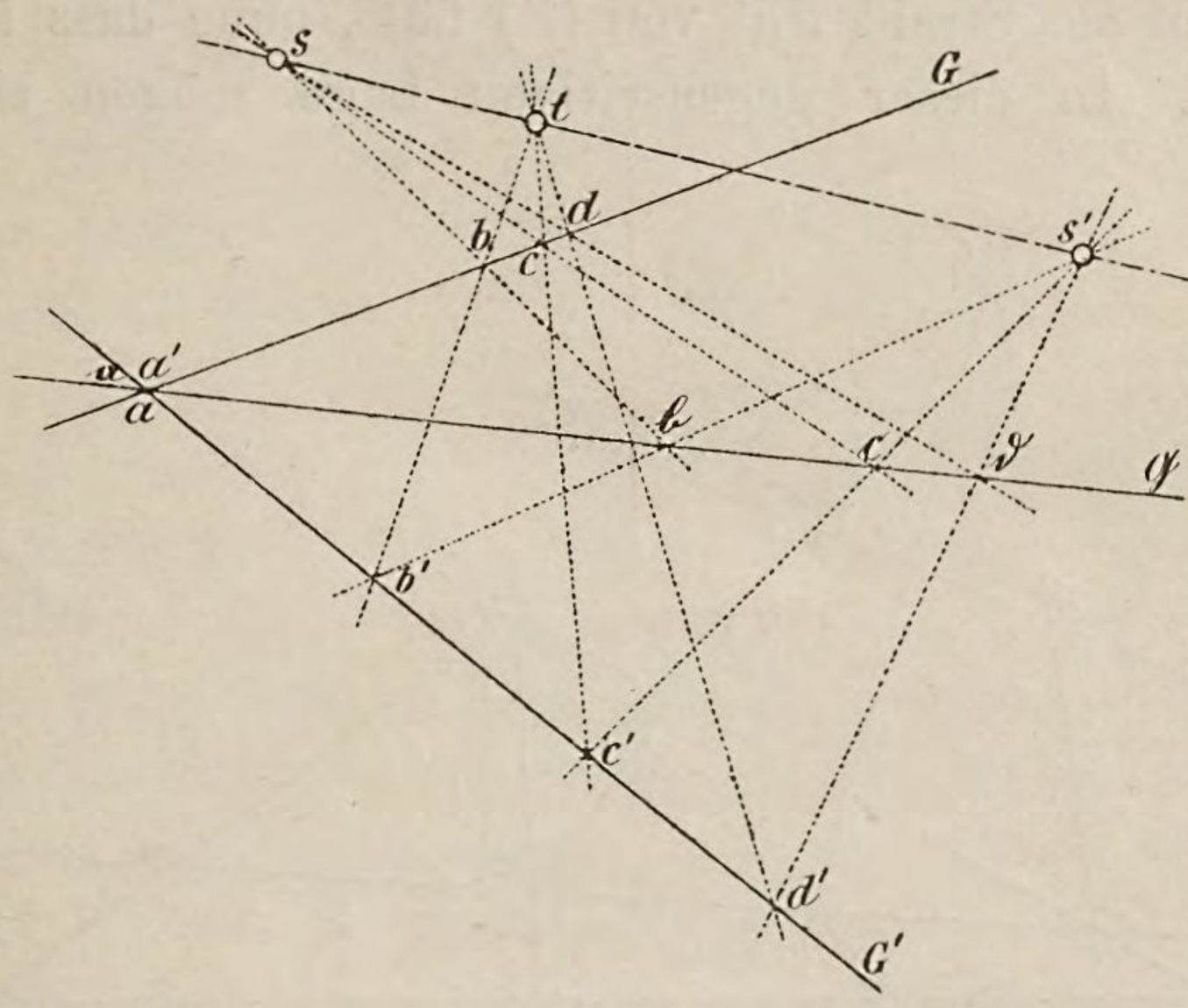


Fig. 5.

Punkte t, durch den die Stralen $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, $\overline{dd'}$ ... gehen müssen, also liegen $|G|$ und $|G'|$ perspektivisch.

Homologe Punkte von $|G|$ und $|G'|$ sind solche, welche demselben Elemente von $\mathfrak{G}$ entsprechen.

Lehrsatz 5. *Zwei perspektivisch liegende Strahlenbüschel (t') schneiden zwei Gerade G und G' ihrer Ebene in projektivischen Punktreihen.*

Denn (t) und (t') sind Scheine eines und desselben geraden Gebildes $\mathfrak{G}$ und diesem sind $|G|$ und $|G'|$ projektivisch, da $|\mathfrak{G}|$ und $|G|$ perspektivisch in Bezug auf (t) und $|\mathfrak{G}|$ und $|G'|$ perspektivisch in Bezug auf (t') liegen.

Nach dem Lehrsatze 4 sind dann auch $|G|$ und $|G'|$ projektivisch und zwar sind homologe Punkte diejenigen, welche Projektionen desselben Punktes von $\mathfrak{G}$ sind.

Die Träger von $|G|$ und $|G'|$ können auch coïncidiren.

Lehrsatz 6. *Zwei Strahlenbüschel, welche zwei zu einander projektivische Punktreihen projiciren, sind projektivisch.*

Offenbar wird der Beweis erbracht sein, wenn man die beiden Strahlenbüschel in perspektivische Lage bringen kann. Der Strahlenbüschel (t) möge das gerade Gebilde $|a, b, c, d \ldots|$

Fig. 6.

von G und (t') das gerade Gebilde $|a', b', c', d' \ldots|$ von G' projiciren. Man denke nun (t) und G fest mit einander verbunden und so in der Ebene verschoben, dass der Strahl $\overline{ta}$ von (t) auf den Strahl $\overline{t'a'}$ von (t') fällt, ohne dass t mit t' coïncidirt. In dieser gegenseitigen Lage mögen sich die

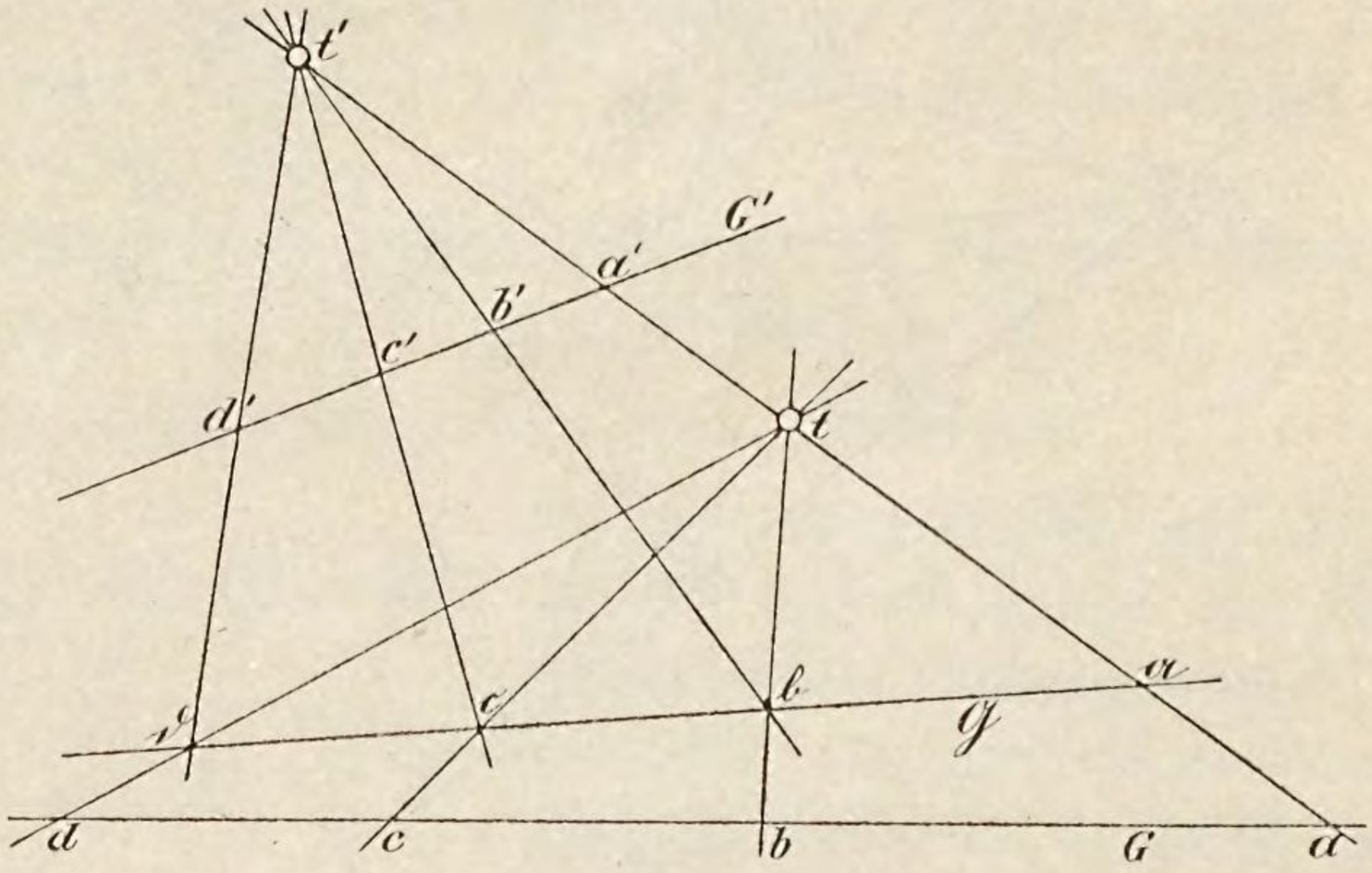


Fig. 6.

Strahlen $\overline{tb}$ und $\overline{t'b'}$ in $\mathfrak{b}$ und $\overline{tc}$, $\overline{t'c'}$ in $\mathfrak{c}$ schneiden. Die Gerade $\overline{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{G}$ wird nun von (t) und (t') in zu einander projektivischen Punktreihen geschnitten, wenn als homologe Punkte diejenigen betrachtet werden, die auf den Strahlen von (t) und (t') liegen, welche homologe Punkte von $|G|$ und $|G'|$ projiciren.

Da nun die projektivischen geraden Gebilde auf $\mathfrak{G}$ drei Deckpunkte besitzen in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und dem Schnittpunkte $\mathfrak{a}$ von $\overline{ta} = \overline{t'a'}$ mit $\mathfrak{G}$, so sind sie identisch, und je zwei homologe Strahlen von (t) und (t') müssen also denselben Punkt von $\mathfrak{G}$ enthalten, d. h. (t) und (t') sind in perspektivischer Lage, sie waren daher ursprünglich projektivisch. muß immer!

Folgerung 1. Zwei projektivische Strahlenbüschel liegen stets perspektivisch, sobald in der Verbindungsgeraden ihrer Scheitel zwei homologe Strahlen liegen.

Hiernach lassen sich die Sätze über projektivische gerade Gebilde auf projektivische Strahlenbüschel einfach übertragen. Aus dem Lehrsatze 3 folgt z. B.:

Zwei concentrische zu einander projektivische Strahlenbüschel haben höchstens zwei Deckstrahlen, wenn sie nicht identisch sind.

2. Zwei Strahlen, welche sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um zwei feste Punkte t, t' drehen, beschreiben zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel. Denken wir uns nun diese beiden Büschel (t) und (t') in eine Ebene so gelegt, dass der Sinn der Drehung für beide der nämliche ist, und dass der Strahl $\overline{tt'}$ eine gleichzeitige Lage des beweglichen Strahles von (t) und (t') ist, so werden je zwei homologe Strahlen beider Büschel zu einander parallel. Da diese Büschel nach der Folgerung 1 zu einem und demselben geraden Gebilde perspektivisch liegen sollen, keiner der Schnittpunkte homologer Strahlen aber im Endlichen liegt, so machen wir die Annahme, dass das gerade Gebilde, zu welchem (t) und (t') perspektivisch liegen, im Unendlichen liege, oder dass die Ebene im *Unendlichen ein gerades Gebilde* $\mathfrak{G}_\infty$ *besitze.* Mit Rücksicht auf das in der Folgerung 1 zum Lehrsatz 1 über den unendlich fernen Punkt eines geraden Gebildes Gesagten folgt, dass die Ebene *nur ein einziges* unendlich fernes gerades Gebilde besitzt, welches die unendlich fernen Punkte der Strahlen des Büschels (t) enthält, und zu dem je zwei congruente Strahlenbüschel perspektivisch liegen, sobald in der ihre Scheitel verbindenden Geraden zwei entsprechende Strahlen coïncidiren, und beide Büschel denselben Sinn haben.

3. Die vorstehenden Sätze liefern folgenden für die Construktion projektivischer Gebilde wichtigen Satz:

Ist in einer beliebigen Reihe von Strahlenbüscheln und geraden Gebilden jedes mit dem folgenden in perspektivischer Lage, so sind je zwei Gebilde der Reihe projektivisch.

Aufgabe 1. Das gerade Gebilde G ist zu G' so projektivisch bezogen, dass a, b, c von G die Punkte a', b', c' von G' entsprechen; es soll zu einem beliebigen Punkte d von G der homologe d' von G' construirt werden.

Man nehme auf $\overline{aa'}$ irgend zwei Punkte t, t' beliebig an (nur nicht t in a oder t' in a'), ziehe $\overline{tb}$ und $\overline{tc}$, welche von $\overline{t'b'}$ und $\overline{t'c'}$ in $\mathfrak{b}$ resp. $\mathfrak{c}$ getroffen werden. Die Strahlen

Fig. 7.

der Büschel (t) und (t'), welche denselben Punkt $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ projiciren, schneiden dann auf G und G' homologe Punkte d, d' der projektivischen geraden Gebilde aus.

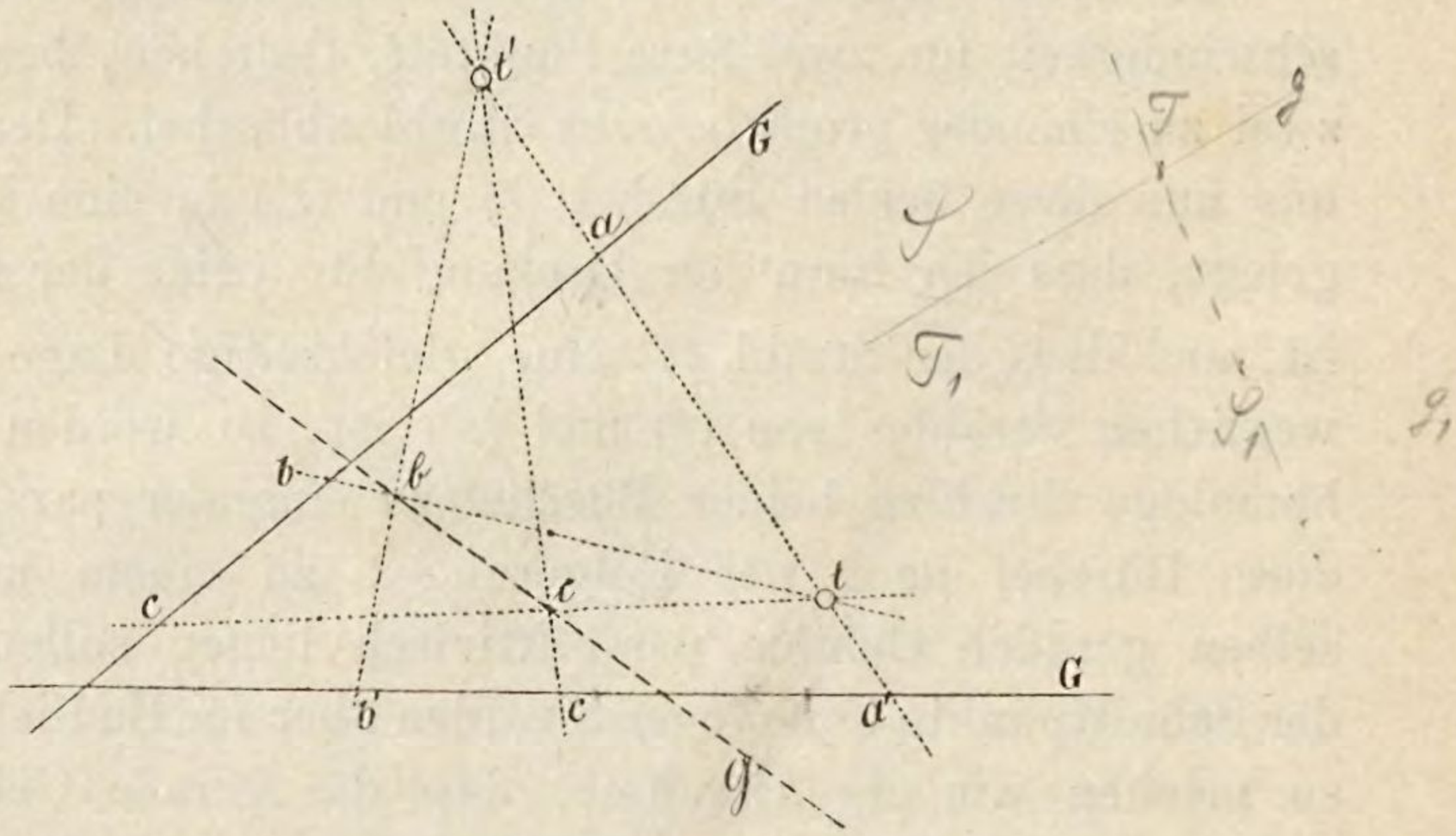


Fig. 7.

Zusatz. Nimmt man t in a' und t' in a an, so möge die erhaltene Gerade $\mathfrak{G}$ *Vervollständigungsaxe* heissen. Schneidet sie G in m und G' in n', so liegt offenbar m' und n im Schnittpunkte beider Träger G, G'. Hieraus folgt, dass die Vervollständigungsaxe dieselbe bleibt, wenn man t in irgend einen Punkt x' von G' und t' in den homologen Punkt x von G verlegt, oder: *Sind x, x' und y, y' zwei homologe Punktepaare der projektivischen Gebilde, so schneiden sich $\overline{xy'}$ und $\overline{x'y}$ stets in einem Punkte $\mathfrak{x}$ einer festen Geraden $\mathfrak{G}$, welche die Vervollständigungsaxe der projektivischen geraden Gebilde ist.*

Aufgabe 2. Es sind zwei projektivische Strahlenbüschel (t) und (t') gegeben, in denen den Strahlen A, B, C die Strahlen A', B', C' entsprechen sollen, man construire zu einem Strahle D den homologen D'.

Man lege durch den Schnittpunkt von A, A' irgend zwei Gerade T, T', welche von den projektivischen Strahlenbüscheln in perspektivischen geraden Gebilden geschnitten werden, deren Perspektivitätscentrum $\mathfrak{g}$ durch B, B' und C, C' bestimmt ist.

Zusatz. Nimmt man T mit A' und T' mit A coïncidirend an, so ist $\mathfrak{g}$ der Schnittpunkt der Strahlen M und N'

welche dem Strale $M' = N$ entsprechen, der in $\overline{tt'}$ liegt; $\mathfrak{g}$ bleibt also ungeändert, wenn an Stelle von A, A' irgend zwei homologe Strahlen X, X' treten, und da diese von den homologen Strahlen Y' und Y in homologen Punkten geschnitten werden, die mit $\mathfrak{g}$ auf einer Geraden liegen, so folgt: *Sind X, X' und Y, Y' zwei Paare homologer Strahlen der Büschel (t) und (t'), so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte $X \,.\, Y'$ und $X' \,.\, Y$ durch einen festen Punkt, welcher das Vervollständigungscentrum der projektivischen Strahlenbüschel heisst.*

§ 3. Die Involution.

Legt man zwei projektivische gerade Gebilde

$$|avu_\infty \ldots| \barwedge |a'v'_\infty u' \ldots|$$

so auf einen Träger G, dass v und u' in denselben Punkt m zu liegen kommen, so bezeichnet man diese specielle Lage der projektivischen Gebilde als *involutorische.*

Das Charakteristische dieser Lage ist, dass dem Punkte m zu $|G|$ oder $|G'|$ gerechnet derselbe Punkt m'_∞ entspricht, das einemal zu $|G'|$, das anderemal zu $|G|$ gezählt. Dieses Verhalten zeigen aber auch irgend zwei einander entsprechende Punkte a, a' der Gebilde. Denn die in § 2 abgeleitete Relation ist:

$$ma \,.\, ma' = \text{Const.} \qquad (3)$$

und zeigt, dass, wenn a' als zu $|G|$ gehörend mit b bezeichnet ist, für den homologen Punkt b' sich $mb' = ma$ ergibt. Es kann aber b' nicht auf die andere Seite von m fallen, auf der a nicht liegt. Denn beschreibt a das Gebilde $|G|$ im Sinne des Pfeiles 1, so wird a' das Gebilde $|G'|$ im Sinne des Pfeiles 2 beschreiben, der, wenn m zwischen aa' liegt, wie Fig. 8a, mit dem ersteren übereinstimmt; wenn m aber ausserhalb liegt, wie in Fig. 8b, ihm entgegengesetzt ist, wie aus (3) folgt. Der Punkt b beschreibt $|G|$ in demselben Sinne, wie a', und da $mb' = ma$ ist und b', a zu verschiedenen Seiten von m liegen sollen, so

Fig. 8a. b.

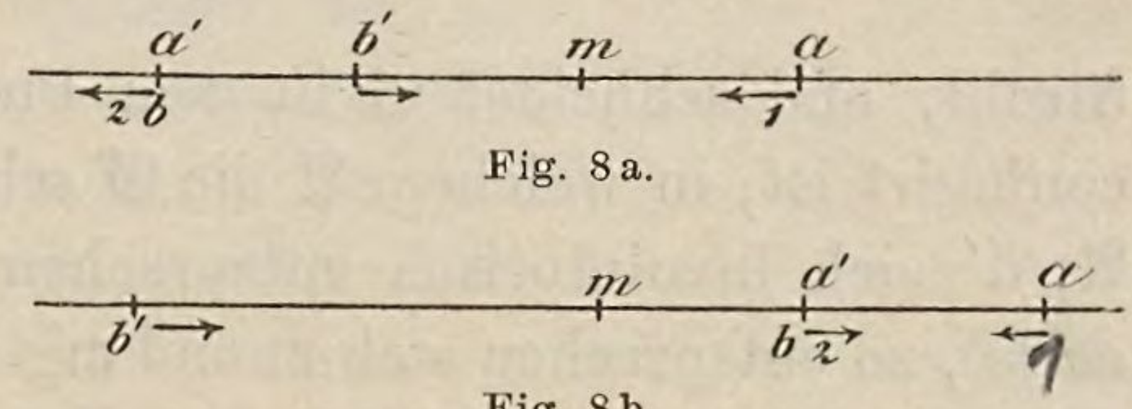


Fig. 8a.

Fig. 8b.

würde in Fig. 8a b' das Gebilde $|G'|$ entgegengesetzt dem Sinne von a' beschreiben, was nach § 2 Folgerung 1 Seite 4 unmöglich ist, da a und b das Gebilde $|G|$ in demselben Sinne beschreiben. In Fig. 8b beschreiben aber a und b das Gebilde $|G|$ im entgegengesetzten Sinne, während a' und b' es in demselben Sinne beschreiben würden, was nach § 2 wieder unzulässig ist. Es muss also b' mit a coïncidiren.

Man nennt dieses Entsprechen der Punkte a, a' ein involutorisches und fasst die beiden conlocalen projektivischen Gebilde unter den Namen *Involution* zusammen und nennt zwei homologe Punkte der projektivischen Gebilde ein *Paar conjugirter* Punkte der Involution. Der Punkt m heisst *Mittelpunkt* der Involution, sein conjugirter ist der unendlich ferne Punkt des geraden Gebildes.

Eine Punktinvolution wird aus jedem Punkte der Ebene durch eine *Strahleninvolution* projicirt.

Lehrsatz 1. *Eine Strahleninvolution wird von jeder Geraden $\mathfrak{G}$ ihrer Ebene in einer Punktinvolution geschnitten.*

Fig. 9. Denn ist die Strahleninvolution in (t) Projektion der Involution auf G und zieht man durch t den Strahl $\mathfrak{A}$ parallel zu $\mathfrak{G}$, so ist der Strahl $\mathfrak{A}'$, welcher a' projicirt, der conjugirte

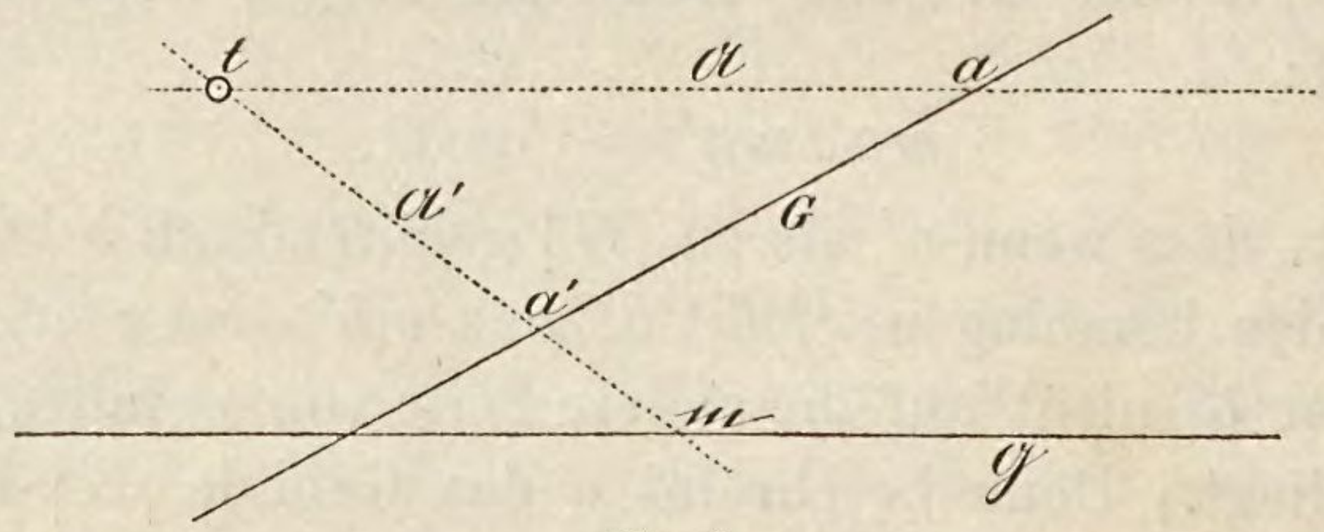


Fig. 9.

Strahl, und schneidet $\mathfrak{G}$ in dem Punkte $\mathfrak{m}$, welcher zu $\mathfrak{m}'_\infty$ conjugirt ist, in welchem $\mathfrak{A}$ die $\mathfrak{G}$ schneidet. Da die Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sich involutorisch entsprechen (die Punkte a, a' thun es ja), so entsprechen sich $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'_\infty$ involutorisch, also haben die projektivischen Gebilde auf $\mathfrak{G}$ involutorische Lage.

Folgerung. Schneiden zwei conlocale Strahlenbüschel *eine* Gerade ihrer Ebene in einer Involution, so bilden sie eine Strahleninvolution und schneiden daher jede Gerade der Ebene in einer Involution.

Lehrsatz 2. *Zwei projektivische gerade Gebilde haben eine involutorische Lage, sobald irgend ein Paar homologer Punkte a, a' sich involutorisch entsprechen.*

Denn projicirt man die auf G liegenden projektivischen Gebilde, in denen a, a' sich involutorisch entsprechen, aus t auf eine Gerade $\mathfrak{G}$, die parallel zu $\overline{ta}$ ist, so ersieht man, dass ta' in dem Punkte $\mathfrak{m}$ schneidet, dessen homologer $\mathfrak{m}'_\infty$ Fig. 9.

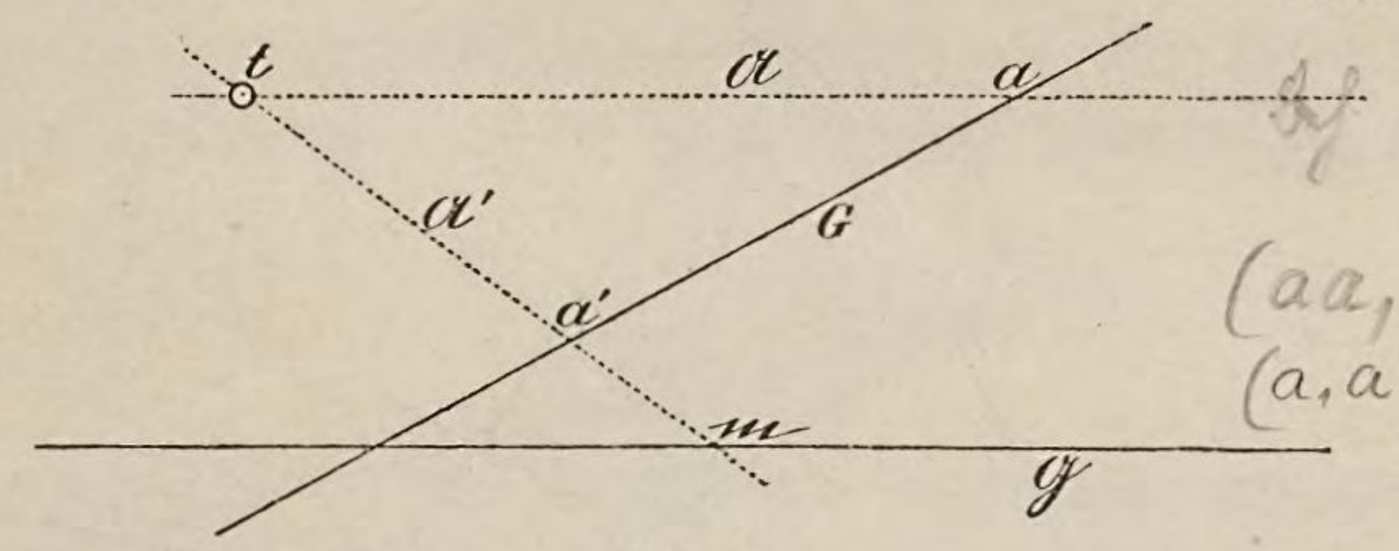


Fig. 9.

ist, und da $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'_\infty$ sich involutorisch entsprechen, so liegen die geraden Gebilde auf $\mathfrak{G}$, also auch auf G, involutorisch.

Folgerung. Von einer Involution kann man zwei Paare entsprechender Elemente beliebig annehmen.

Denn soll die Involution die Paare a, b und c, d haben, so braucht man nur zwei projektivische Gebilde so zu bestimmen, dass den Elementen a, b, c des einen b, a, d des anderen entspricht, was stets nach § 2 Folgerung 3 Seite 5 möglich ist, dann haben aber auch die Gebilde involutorische Lage und es muss daher

$$|a\,b\,c\,d| \barwedge |b\,a\,d\,c| \qquad (4)$$

sein, weil auch c, d einander involutorisch entsprechen.

Dies ist eine projektivische Relation zwischen vier beliebigen Punkten einer Geraden, die ganz ebenso zwischen vier Strahlen eines Büschels stattfindet und manchmal von Wichtigkeit ist.

Die Vervollständigung der Involution kann nach § 2 geschehen. Der folgende Satz führt aber einfacher zum Ziele.

Die sechs Geraden, welche vier Punkte der Ebene paarweise verbinden, bilden ein *vollständiges Viereck*. Je zwei, die in keinem der vier Punkte sich schneiden, nennt man *Gegenseiten*. Es gibt daher drei Paar Gegenseiten im vollständigen Vierecke.

Lehrsatz 3. *Jede Gerade der Ebene schneidet die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Viereckes in drei Paaren einer Involution.* (Desargue'scher Satz, 1593—1662.)

Fig. 10. Wird die Gerade G von den drei Paar Gegenseiten des Viereckes 1 2 3 4 in den Punktepaaren $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ geschnitten und bezeichnet man den Schnittpunkt von $\overline{13}$ mit

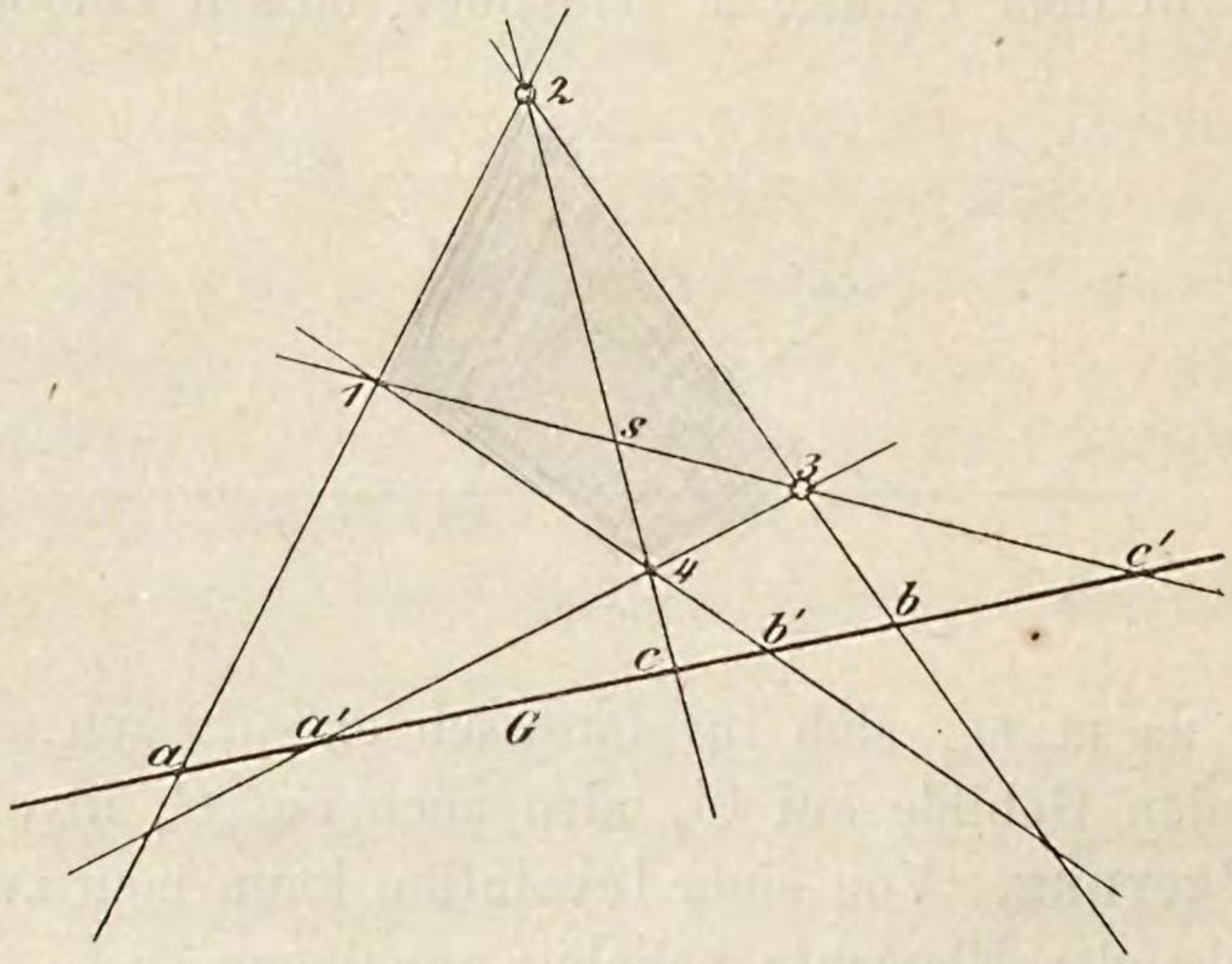


Fig. 10.

$\overline{24}$ durch s, so ergibt sich durch die Projektion von s, c', 1, 3 aus dem Punkte 4 und 2 auf G, dass

$$|c\,c'\,b'\,a'\,| \barwedge |c\,c'\,a\,b|$$

und da nach (4)

$$|c\,c'\,b'\,a'\,| \barwedge |c'\,c\,a'\,b'\,|,$$

so folgt auch

$$|c'\,c\,a'\,b'\,| \barwedge |c\,c'\,a\,b|$$

und da c, c' einander involutorisch entsprechen, so thun es auch a, a' und b, b', w. z. b. w.

Sind also von einer Involution die zwei Paare $a\,a'$, $b\,b'$ gegeben, so ist aus Fig. 10 ersichtlich, wie der jedem Punkte c entsprechende Punkt c' der Involution mit dem Lineal allein construirt wird.

Durch zwei Punkte a, b wird eine Gerade in zwei Strecken getheilt, von denen die endliche Strecke mit $a\,.\,b$, die andere, welche durch den unendlich fernen Punkt zusammenhängt, mit $a : b$ bezeichnet werden mag.

Sind a, a' ein Paar einer Involution auf der Geraden G, so kann der Mittelpunkt m derselben entweder in $a \,.\, a'$ oder in $a : a'$ liegen.

a) Liegt der Punkt m innerhalb $a \,.\, a'$, so liegt er auch innerhalb der endlichen Strecke, die irgend zwei homologe Punkte x, x' der Involution begränzen.

Denn denken wir uns den Punkt x von a ausgehend in Fig. 11 a
der Richtung des Pfeiles 1 die Gerade G beschreiben, so wird x' von a' ausgehend die Gerade in der Richtung des Pfeiles 2 beschreiben müssen, wie oben gezeigt wurde.

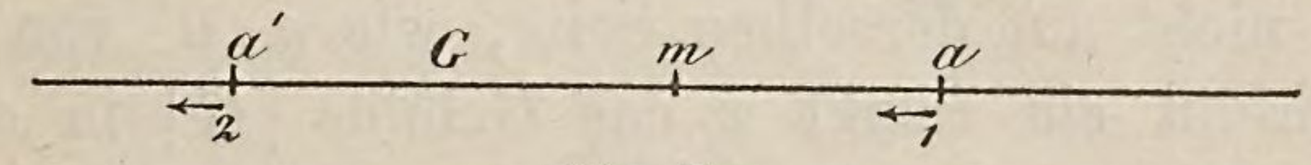


Fig. 11 a.

Ueberschreitet x den Punkt m ohne die Bewegungsrichtung zu ändern und rückt gegen a', so wird x' über den Punkt m'_∞ gehen und ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern dem Punkte a sich nähern. Wie man sieht entsprechen die auf der einen Seite von m liegenden Punkte den auf der andern Seite von m liegenden Punkten. Und hieraus ist klar, dass je zwei einander entsprechende Punkte den Punkt m in ihrer endlichen Strecke enthalten müssen.

Die beiden projektivischen Gebilde $|G|$ und $|G'|$ auf G, welche die Involution bilden, werden von den homologen Punkten in *demselben Sinne* durchlaufen und es fällt *nie* ein Punkt mit seinem homologen zusammen, da m stets in der endlichen Strecke zwischen den homologen Punkten liegen muss. Eine solche Involution möge eine *elliptische* genannt werden.

b) Liegt der Mittelpunkt m ausserhalb der endlichen Fig. 11 b.
Strecke $a \,.\, a'$, so kann m nie in der Strecke $x \,.\, x'$ liegen, wenn x, x' ein Paar dieser Involution ist, wie aus dem Vorangehenden folgt.

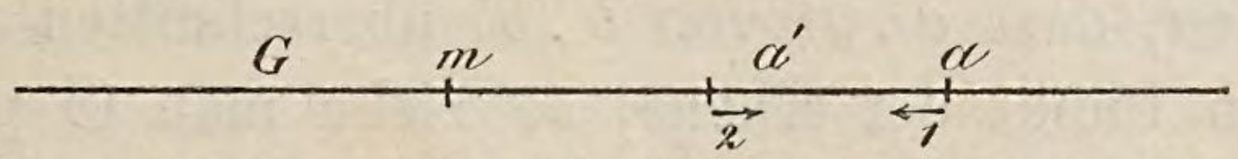


Fig. 11 b.

Bewegt sich nun x von a ausgehend durch $a \,.\, a'$ gegen den Punkt a', so muss sich auch x' von a' ausgehend durch $a \,.\, a'$ gegen a bewegen, weil sonst x' den Punkt m und m'_∞

passiren müsste, was nicht stattfinden kann, da x in den Punkt m'_∞ nicht gelangt. Die Punkte x und x' beschreiben daher die Strecke $a \,.\, a'$ im entgegengesetzten Sinne und müssen daher *einmal* aber auch *nur einmal* einander begegnen. In einem solchen Punkte $g = g'$ deckt sich also ein Punkt mit seinem homologen, g ist ein *Deckpunkt* der involutorisch liegenden geraden Gebilde und nach § 2 muss noch ein zweiter Deckpunkt $h = h'$ auftreten. Dieser muss notwendig auf der anderen Seite von m liegen als der Punkt g, und wird von allen Paaren bb' eingeschlossen in ihrer endlichen Strecke $b \,.\, b'$, die nicht auf derselben Seite, wie $a \,.\, a'$ von m liegt.

Beschreibt ein Punkt x das Gebilde $|G|$ in *einem bestimmten Sinne*, so beschreibt x' das Gebilde $|G'|$ im *entgegengesetzten Sinne* und es geschieht zweimal, dass sich zwei homologe Punkte decken. Eine solche Involution nennen wir eine *hyperbolische*, sie hat zwei Deckpunkte.

Eine $\left\{\begin{matrix}\text{elliptische}\\ \text{hyperbolische}\end{matrix}\right\}$ Punktinvolution wird aus jedem Punkte der Ebene durch eine $\left\{\begin{matrix}\text{elliptische}\\ \text{hyperbolische}\end{matrix}\right\}$ Strahleninvolution projicirt und diese schneidet jede Gerade der Ebene wieder in einer $\left\{\begin{matrix}\text{elliptischen}\\ \text{hyperbolischen}\end{matrix}\right\}$ Punktinvolution.

Lehrsatz 4. *In einer elliptischen Involution wird jedes Paar entsprechender Elemente durch jedes andere getrennt.*

Denn liegt Fig. 11a der Punkt b innerhalb $a \,.\, a'$, so liegt notwendig b' ausserhalb, und $a \,.\, a'$, $b \,.\, b'$ überschneiden einander daher. Es ist unmöglich von a nach a' zu gelangen, ohne dabei b oder b' zu überschreiten.

Lehrsatz 5. *Trennen einander irgend zwei Paare einer Involution, so thun es alle Paare; die Involution ist elliptisch.*

Fig. 12.

Denn seien auf G die Paare aa' und bb' der Involution so beschaffen, dass $a \,.\, a'$ von $b \,.\, b'$ überschnitten wird, und t irgend ein Punkt der Ebene, so ziehe man $\mathfrak{G}$ parallel zu zu $\overline{ta'}$ und projicire a, b, b' aus t auf $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$, dann ist $\mathfrak{a}$ der Mittelpunkt der Involution auf $\mathfrak{G}$ und liegt innerhalb $\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{b}'$.

Folgerung. *In einer hyperbolischen Involution trennen einander keine zwei Paare, und gibt es in einer Involution irgend*

zwei Paare, die einander nicht trennen, so ist diese notwendig hyperbolisch.

Sind $a\,a'$ und $b\,b'$ zwei Paare einer hyperbolischen Punktinvolution auf G, so können die Strecken $a\,.\,a'$ und $b\,.\,b'$ entweder ganz ausserhalb einander liegen, oder die

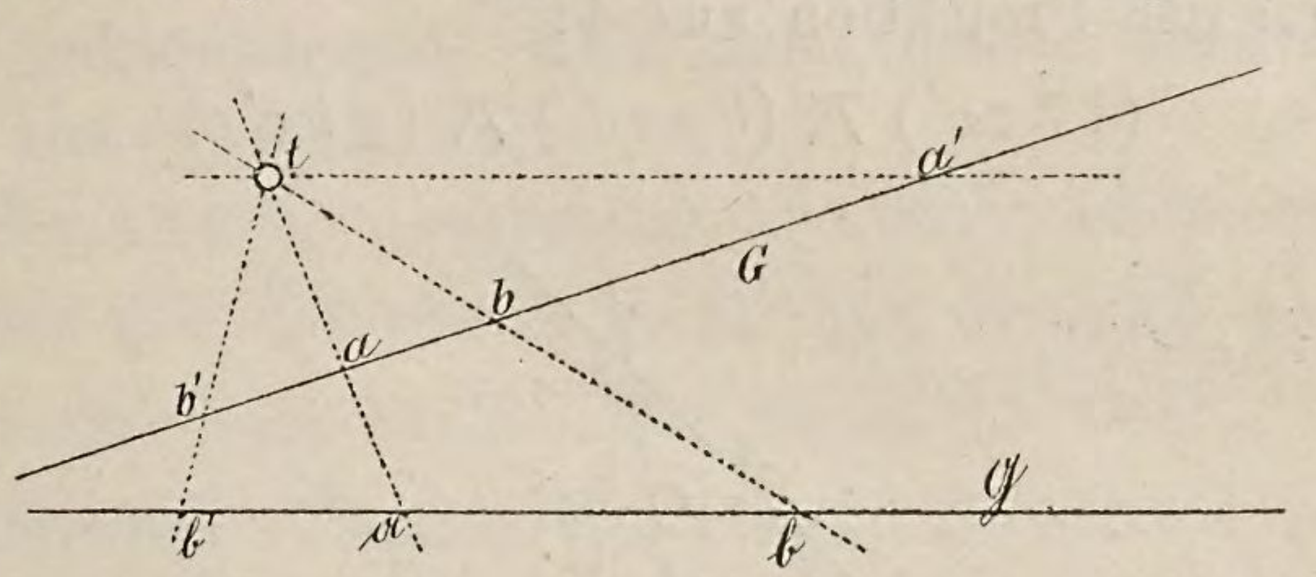


Fig. 12.

eine liegt ganz innerhalb der anderen. Im ersten Falle liegt in jeder der Strecken $a\,.\,a'$, sowie $b\,.\,b'$ ein Deckpunkt, im letzten liegt ein Deckpunkt innerhalb beider, der andere ausserhalb beider. Für Strahlenbüschel treten ähnliche Betrachtungen ein, wo an Stelle der Strecken nur Winkelräume treten.

Lehrsatz 6. *Hat man vier Punkte a, b, c, d einer Geraden, so bestimmen dieselben drei Involutionen, indem man die Punkte zu sechs Paaren anordnen kann, von denen je zwei Paare eine Involution individualisiren. Von diesen Involutionen ist stets eine elliptisch und zwei sind hyperbolisch.*

Es mögen die Punkte auf G in der Reihe $a\,b\,c\,d$ auf einander folgen, dann ist die Involution, deren Paare ac und bd sind, nach dem Lehrsatze 5 notwendig elliptisch, und die Involutionen, deren Paare ab, cd oder ad, bc sind, sind nach der Folgerung zu diesem Lehrsatze hyperbolisch.

Es ist wohl überflüssig zu erwähnen, dass der Satz auch von vier Strahlen eines Büschels gilt.

Eine hyperbolische Involution ist durch die Deckelemente derselben vollständig bestimmt, da diese zwei Paare darstellen. Die entsprechenden Punkte lassen sich nach dem Desargue'schen Satze leicht construiren.

Seien in g, h die Deckpunkte der Involution auf G gegeben und es soll zu c der conjugirte Punkt c' construirt werden, so ziehe man durch c eine beliebige Gerade, nehme auf ihr zwei Punkte 2 und 4 an und verbinde dieselben mit

Fig. 13.

g und h. Die Geraden treffen einander in 1 und 3 und die Gerade $\overline{13}$ schneidet G in dem Punkte c'. Denn ist $\mathfrak{c}$ der Schnittpunkt von $\overline{13}$ mit $\overline{24}$, so folgt wegen der Projektion aus 2:

$$(g\,h\,c\,c') \barwedge (1\,3\,\mathfrak{c}\,c')$$

und wegen der Projektion aus 4:

$$(1\,3\,\mathfrak{c}\,c') \barwedge (h\,g\,c\,c') \barwedge (g\,h\,c'\,c)$$

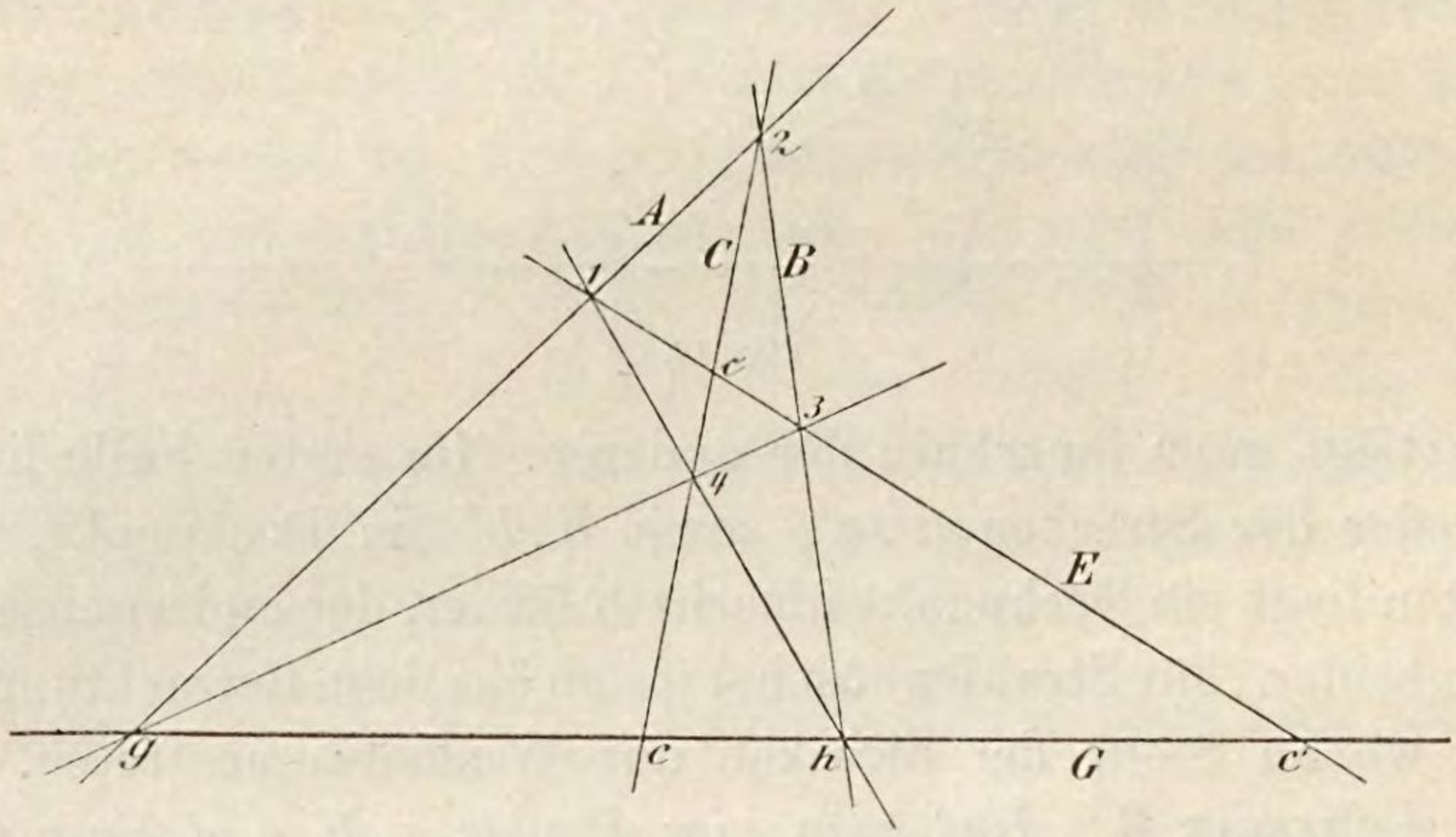


Fig. 13.

nach der projektivischen Relation (4) auf Seite 15. Daher ist auch

$$(g\,h\,c\,c') \barwedge (g\,h\,c'\,c)$$

d. h. g, h sind selbst entsprechende Punkte in der Involution, deren Paar $c\,c'$ ist.

Definition. Jedes Paar einer hyperbolischen Involution *trennt* die Deckelemente derselben *harmonisch*.

Lehrsatz 7. *Wird g, h von c, c' harmonisch getrennt, so ist auch c, c' von g, h harmonisch getrennt.*

Denn ist g, h von c, c' harmonisch getrennt, so heisst dies, es ist

$$(g\,h\,c\,c') \barwedge (g\,h\,c'\,c),$$

also nach der projektivischen Relation (4) auf Seite 15

$$(g\,h\,c\,c') \barwedge (h\,g\,c\,c')$$

d. h. c, c' sind die Deckpunkte einer Involution, in der g, h ein Paar ist.

Wir wollen solche vier Punkte a, b, c, d, wo ab von cd harmonisch getrennt wird, also auch cd von ab harmonisch

getrennt ist, *ein harmonisches Quadrupel* nennen und mit $[a\,c\,b\,d]$ bezeichnen.

Ein harmonisches Punktquadrupel wird aus jedem Punkte t der Ebene durch ein harmonisches Strahlenquadrupel projicirt, und dieses schneidet jede Gerade wieder in einem harmonischen Punktquadrupel. Zwei harmonische Quadrupel sind einander stets projektivisch.

Die Fig. 13 zeigt gleichzeitig die Construktion des Strahles C', welcher $C = \overline{24}$ von $A = \overline{21}$ und $B = \overline{23}$ harmonisch trennt, es ist dieses nämlich der Strahl $\overline{2\,c'} = C'$.

Folgerung. Trennen einander die Strecken $a\,.\,b$ und $c\,.\,d$ nicht, so existirt immer ein Punktepaar g, h, welches sowohl $a\,b$ als $c\,d$ harmonisch trennt.

Anmerkung. Ist d der unendlich ferne Punkt von G, so liegt c in der Mitte von $a\,.\,b$, wenn $[a\,c\,b\,d_\infty]$ ein harmonisches Quadrupel ist.

Denn soll zu a der Punkt b construirt werden, der c und d_∞ harmonisch trennt, so hat man nur die Construktion der Fig. 13 zu wiederholen; dann zeigt aber Fig. 14, dass $\overline{a\,c} = \overline{c\,b}$ ist, da 1 2 3 4 ein Parallelogramm wird, wenn man $\overline{2a} = \overline{a\,4}$ macht. Fig. 14.

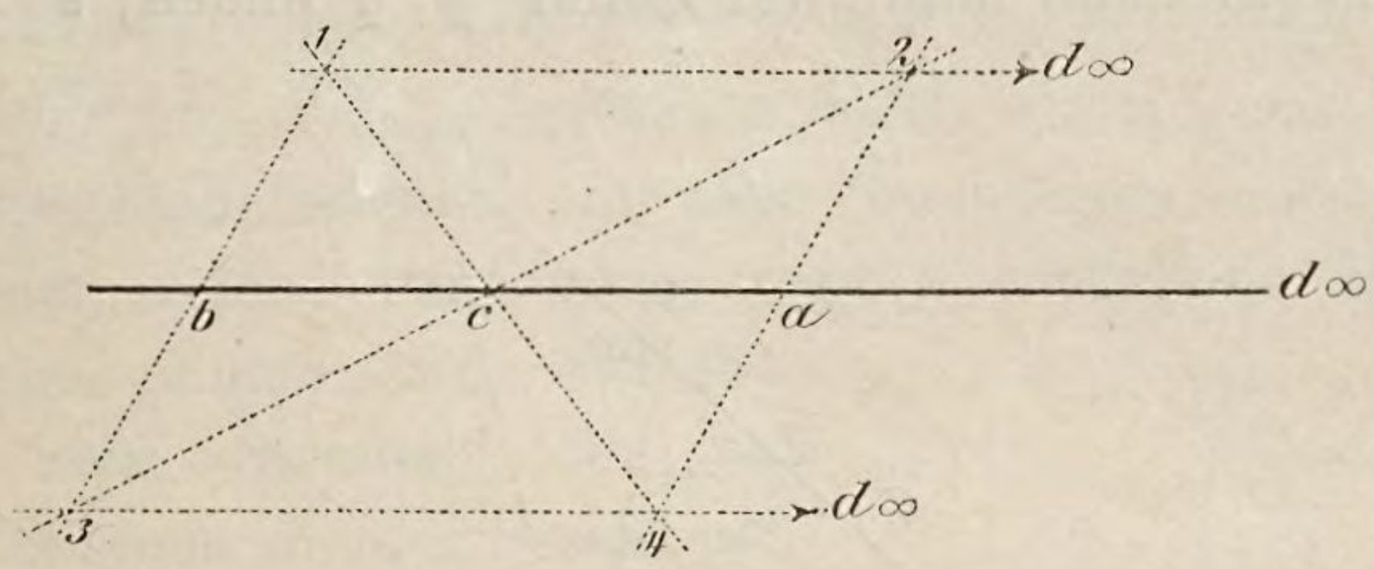


Fig. 14.

Da alle Punktepaare, welche a, b harmonisch trennen, die Involution bilden, deren Deckpunkte a, b sind, und deren Mitte dem unendlich fernen Punkte des geraden Gebildes entspricht, so folgt aus dem Obigen: *Die Deckpunkte einer hyperbolischen Involution liegen in gleichen Abständen zu beiden Seiten der Mitte der Involution.*

Diess führt zu einer andern Construktion von vier har-

monischen Strahlen, die aber nicht mit dem Lineal allein ausführbar ist.

Fig. 15.

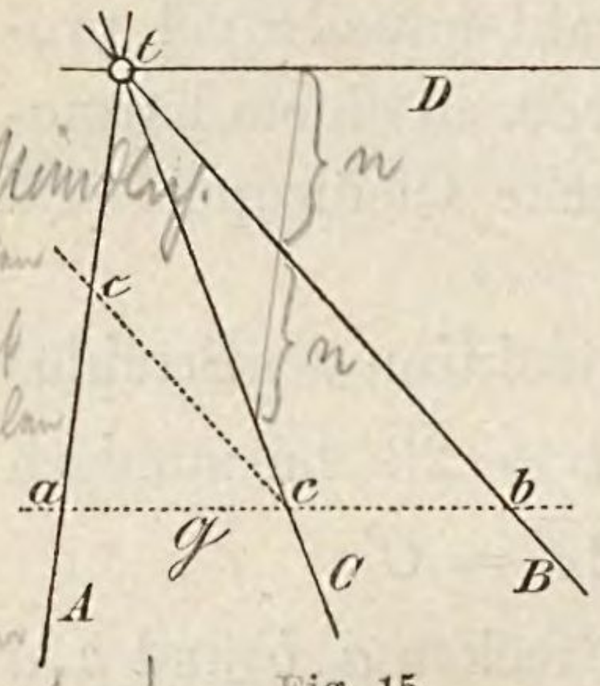


Fig. 15.

Soll zu den Strahlen A, B derjenige Strahl D construirt werden, der C von ihnen harmonisch trennt, so hat man nach dem Vorangehenden nur eine Gerade $\mathfrak{G}$ zu zeichnen, deren Abschnitt zwischen A, B durch C halbirt wird, dann ist D zu $\mathfrak{G}$ parallel. Zur Construktion ziehe man cc parallel zu B und mache $ca = ct$ auf A, dann ist $\overline{ca} = \mathfrak{G}$.

Hat man drei Punkte a, b, c eines geraden Gebildes G und bestimmt man die Punkte, welche einen von den beiden anderen harmonisch trennen, und sodann die Punkte, welche irgend einen der Punkte von irgend zweien derselben harmonisch trennen und fährt so fort, so erhält man unendlich viele Punkte des geraden Gebildes G. Es gilt nun folgender

Fig. 16.

Satz: *Sind x, y irgend zwei Punkte von G, so können, durch harmonische Theilung von a, b, c ausgehend, stets Punkte construirt werden, die innerhalb $x \,.\, y$ liegen, so nahe auch x, y einander sind.*

Offenbar kann man zwei Punkte p, q finden, so dass die

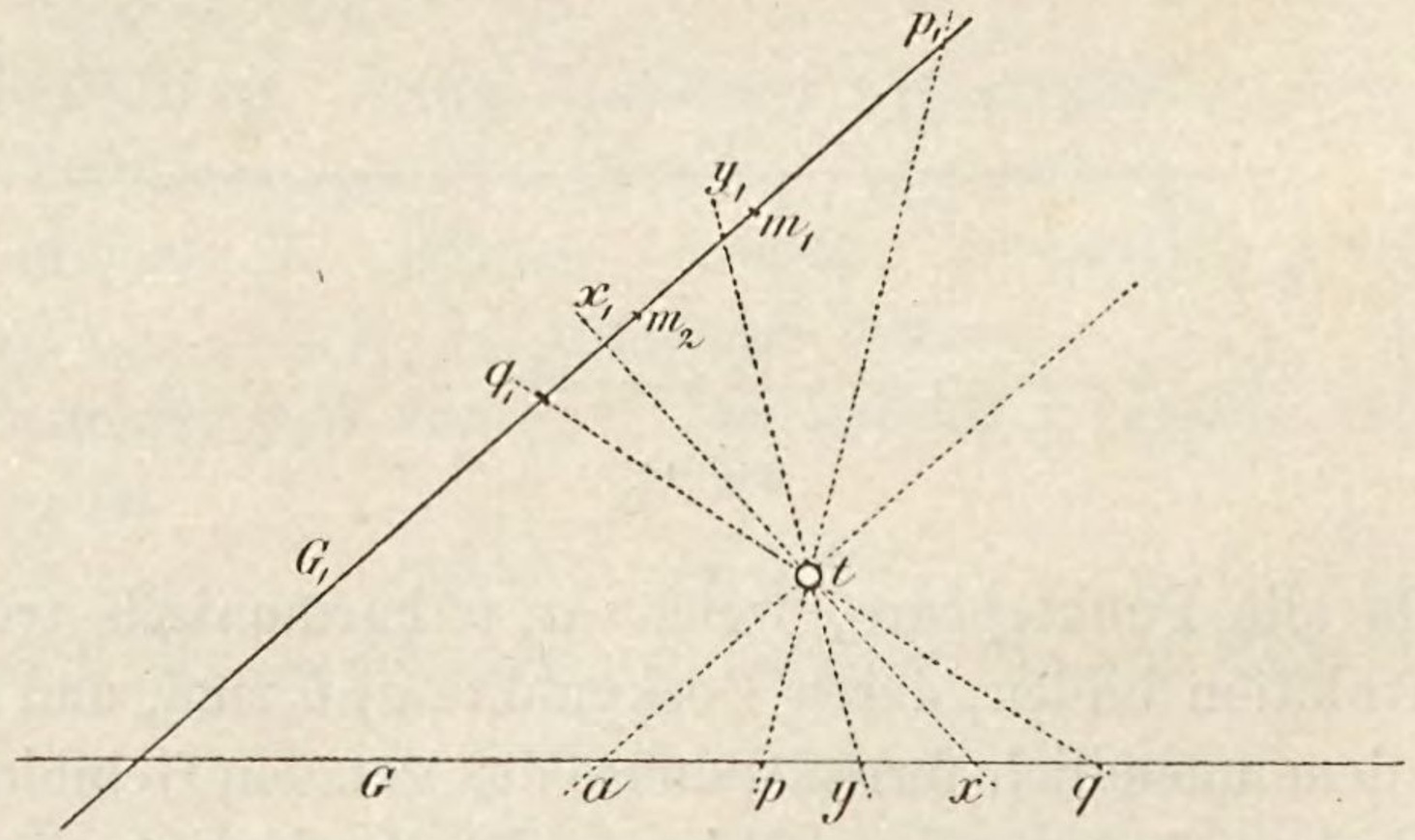


Fig. 16.

Strecke $x \,.\, y$ ganz innerhalb $p \,.\, q$ liegt. Projicirt man nun die Punkte p, q, x, y aus dem Punkte t auf eine Gerade G_1,

die parallel zu $\overline{ta}$ ist, in die Punkte $p_1 q_1 x_1 y_1$ und construirt die Mitte m_1 von $p_1 . q_1$ und wenn m_1 innerhalb $p_1 . x_1$ liegt, die Mitte m_2 von $m_1 q_1$ u. s. w. (wenn ein m in $y_1 . q_1$ fällt, so nehme man die Mitte von der Strecke, die dieses mit dem vorhergehenden m bildet), so ist ersichtlich, dass durch fortgesetztes Halbiren man schliesslich innerhalb $x_1 . y_1$ einen Punkt n_1 erhält, der auf G projicirt einen Punkt n innerhalb $x . y$ liefert, der durch harmonische Theilung erhalten wurde, wobei der Punkt a immer einer der benutzten Punkte ist.

Der Satz gilt offenbar auch für Strahlenbüschel.

Lehrsatz 8. *Entsprechen in zwei Gebilden je vier harmonischen ~~Punkten~~ des einen vier harmonische ~~Punkte~~ des anderen, so sind die Gebilde projektivisch* (Staudt'scher Satz).

Wir beweisen den Satz für gerade Gebilde. Je zwei Punktepaaren ab, cd von G, die einander nicht trennen, müssen auf G' zwei Punktepaare $a'b', c'd'$ entsprechen, die sich ebenfalls nicht trennen, denn es existiren in diesem Falle zwei Punkte g, h, welche sowol ab als cd harmonisch trennen und diesen müssen die Punkte g', h' von G' entsprechen, welche sowol $a'b'$ als auch $c'd'$ harmonisch trennen. Legen wir nun G und G' so aneinander, dass a und a' sich decken, so müssten die geraden Gebilde, wenn sie projektivisch sind, perspektivisch liegen, d. h. die Verbindungsgeraden homologer Punkte $\overline{bb'}, \overline{cc'}, \overline{dd'}$ ... müssten durch einen Punkt t gehen. Diess geschieht offenbar für alle homologen harmonischen Quadrupel, welche den Punkt a resp. a' enthalten. Man kann nach dem obigen Satze zwischen irgend zwei Strahlen des Büschels (t) einen solchen Strahl construiren, der G und G' in homologen Punkten, der Definition des Lehrsatzes entsprechend, schneidet. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Verbindungsgerade irgend zweier homologer Punkte x, x' durch t geht.

Fig. 17.

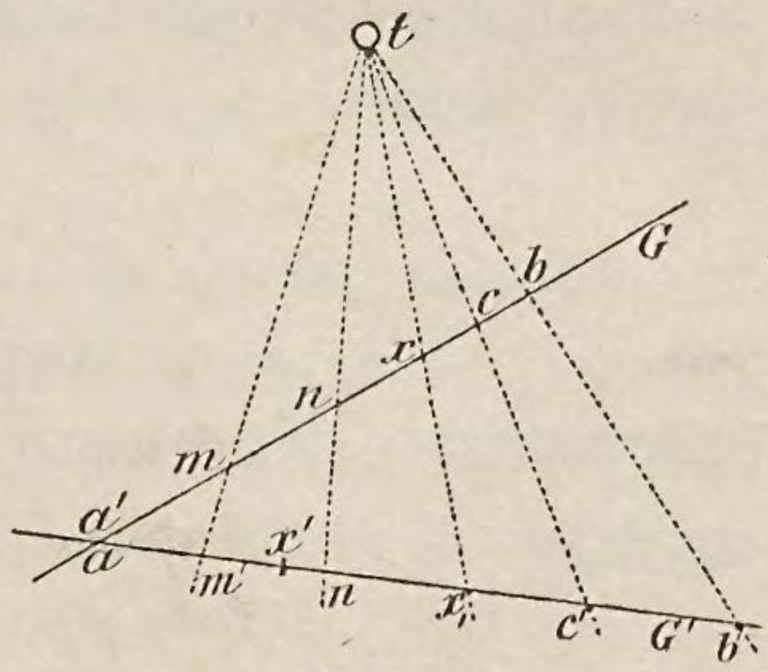


Fig. 17.

Würde x' nicht auf $\overline{tx}$ liegen, so kann man zwei Strahlen $\overline{tm}, \overline{tn}$ construiren, welche G in m, n und G' in m', n', den homologen

Punkten schneiden, so dass der Strahl $\overline{tn}$ in dem einen Winkel zwischen $\overline{tx}$ und $\overline{tx'}$, der Strahl $\overline{tm}$ aber in dem Nebenwinkel des ersteren liegt, in welchem auch $\overline{tb} = \overline{tb'}$ liegen möge. In Folge dessen werden die Strecken $m \,.\, n$ und $x \,.\, b$ auf G einander nicht überschneiden, während die homologen Strecken $m' \,.\, n'$ und $x' \,.\, b'$ es auf G' thun. Diess ist zu Folge des Eingangs Gesagten unmöglich, also kann der Strahl tx von $\overline{tx'}$ nicht verschieden sein.

II. Kapitel.

Collineation.

§ 1. Die collineare Verwandtschaft zweier ebenen Systeme.

Wählt man in zwei ebenen Systemen E und E' zwei Paar Strahlenbüschel (a), $(\mathfrak{a})$ in E und (a'), $(\mathfrak{a}')$ in E' beliebig, und bezieht die Büschel (a) projektivisch auf (a') und $(\mathfrak{a})$ projektivisch auf $(\mathfrak{a}')$, so wird jedem Punkte x von E, in welchem sich die Strahlen X und $\mathfrak{X}$ von (a) resp. $(\mathfrak{a})$ schneiden, der Punkt x' in E' in bestimmter Weise entsprechen, in welchem sich die homologen Strahlen X' resp. $\mathfrak{X}'$ von (a') und $(\mathfrak{a}')$ schneiden.

Setzt man hiebei voraus, dass dem Strahle $\overline{a\,\mathfrak{a}} = A$ von (a) der Strahl $\overline{a'\,\mathfrak{a}'} = A'$ von (a') und dem Strahle $\overline{\mathfrak{a}\,a} = \mathfrak{A}$ von $(\mathfrak{a})$ der Strahl $\overline{\mathfrak{a}'\,a'} = \mathfrak{A}'$ von $(\mathfrak{a}')$ in der projektivischen Beziehung der Büschel entspricht, so heisst die durch die entsprechenden Punkte x, x' hergestellte Beziehung der ebenen Systeme E und E' *Collineation.* Man sagt auch, die ebenen Systeme stehen in *collinearer Verwandtschaft.*

Lehrsatz 1. *In collinearen ebenen Systemen E, E' entspricht jedem geraden Gebilde G ein demselben projektivisches gerades Gebilde G'. Jedem Strahlenbüschel (g) ein hiezu projektivischer Strahlenbüschel (g').*

Denn beschreibt x das gerade Gebilde G, so sind die Fig. 18.
Strahlenbüschel $a(X)$ und $\mathfrak{a}(\mathfrak{X})$ perspektivisch, aber auch die ihnen projektivischen Büschel $a'(X')$ und $\mathfrak{a}'(\mathfrak{X}')$ werden perspektivisch, da die Strahlen $\overline{a'\,\mathfrak{a}'} = A'$ und $\overline{\mathfrak{a}'\,a'} = \mathfrak{A}'$ einander zugewiesen sind.

Hieraus folgt, dass den Strahlen eines Büschels (g) die Strahlen eines Büschels (g') entsprechen werden, so dass g und g' homologe Punkte der Collineation sind. Projicirt (g) das

gerade Gebilde $|G|$, so wird (g') das gerade Gebilde $|G'|$ projiciren, und da $|G|$ und $|G'|$ projektivisch sind, so sind es auch (g) und (g').

Es werden aber auch den Punkten von $\overline{a\mathfrak{a}}$ die Punkte von $\overline{a'\mathfrak{a}'}$ projektivisch entsprechen, und zwar sind a, a' und

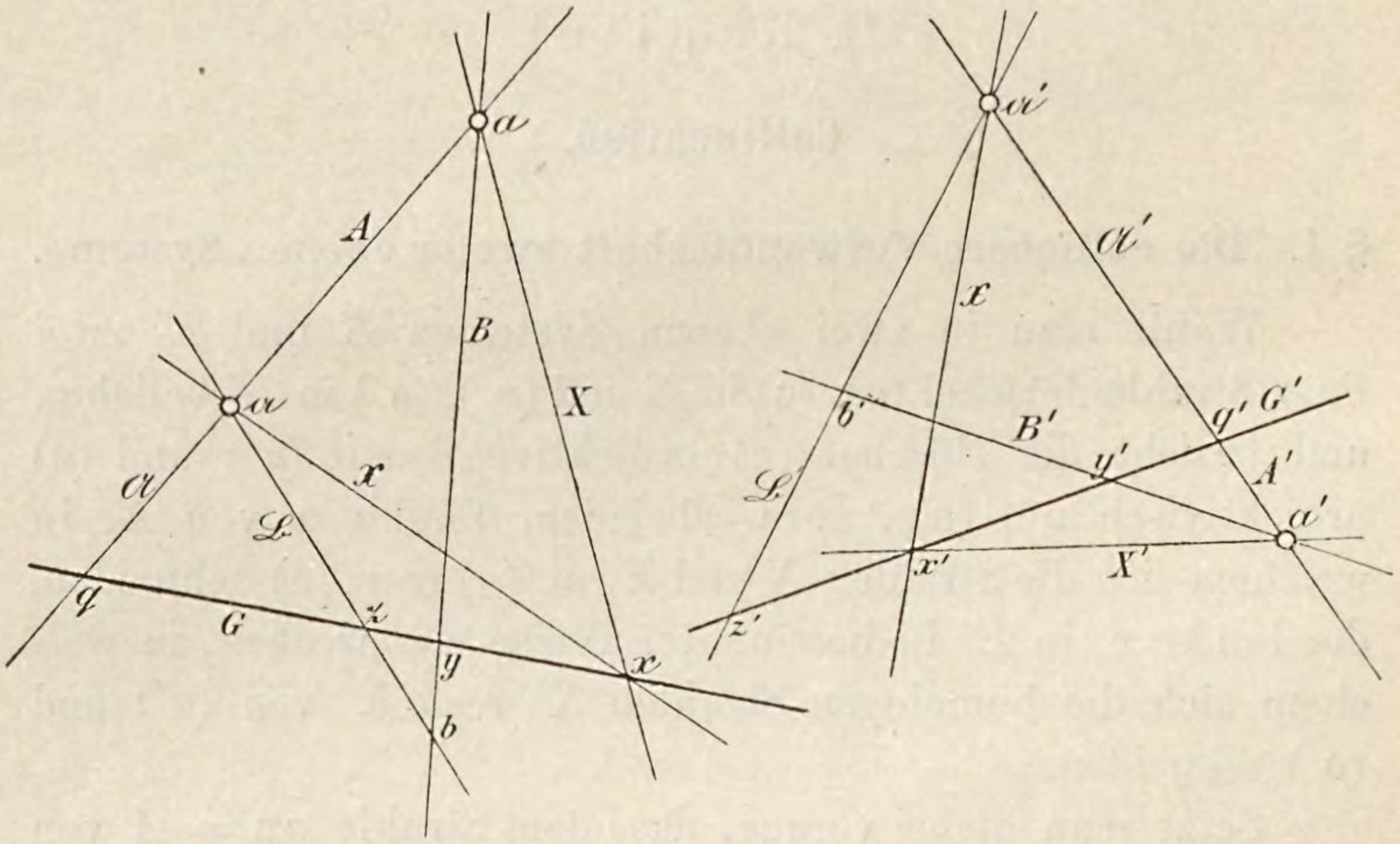


Fig. 18.

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ homologe Punkte. Offenbar entspricht der Schnittpunkt q von G mit $\overline{a\mathfrak{a}}$ dem Schnittpunkte q' von G' mit $\overline{a'\mathfrak{a}'}$; beschreibt also G den Strahlenbüschel (x), q das gerade Gebilde auf $\overline{a\mathfrak{a}}$, so wird G' den zu (x) projektivischen Strahlenbüschel (x') beschreiben, also q' das zu q projektivische gerade Gebilde auf $\overline{a'\mathfrak{a}'}$ durchlaufen.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass auch den Strahlen von (q) die Strahlen von (q') entsprechen.

Fig. 18. Seien B und $\mathfrak{B}$ irgend zwei Strahlen von (a) und $(\mathfrak{a})$, welche sich in b schneiden, ihre entsprechenden B' und $\mathfrak{B}'$ gehen durch b'. Es mögen B und $\mathfrak{B}$ die G in y und z treffen, dann schneiden B' und $\mathfrak{B}'$ die G' in den Punkten y' und z', welche zu y und z homolog sind. Beschreibt nun G den Strahlenbüschel (q), so wird das gerade Gebilde

$$B\,|\,b\,y\,a\,\ldots\,|\,\curlywedge\,\mathfrak{B}\,|\,b\,z\,\mathfrak{a}\,\ldots\,|\,,$$

also auch

$$B'\,|\,b'\,y'\,a'\,\ldots\,|\,\curlywedge\,\mathfrak{B}'\,|\,b'\,z'\,\mathfrak{a}'\,\ldots\,|$$

und da letztere im Schnittpunkte b' zwei homologe Elemente vereinigt haben, so liegen sie perspektivisch und ihr Projektionscentrum ist der Schnittpunkt q' von $\overline{y'z'}$ und $\overline{a'\mathfrak{a}'}$. Daher beschreibt G' den Strahlenbüschel (q'), welcher projektivisch zu (q) ist.

Lehrsatz 2. *Die collineare Beziehung zwischen E und E' bleibt unverändert, wenn man an Stelle von $(a), (\mathfrak{a}), (a'), (\mathfrak{a}')$ irgend zwei Paare homologer Strahlenbüschel nimmt.*

Denn seien (c), (c') sowie $(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}')$ irgend zwei Paare homologer Strahlenbüschel, so werden den Strahlen N und $\mathfrak{N}$ von (c) und $(\mathfrak{c})$, welche den Punkt n von E projiciren, die Strahlen N' und $\mathfrak{N}'$ von (c') resp. $(\mathfrak{c}')$ homolog sein, die den Punkt n' von E' projiciren, welcher n in der Collineation entspricht.

Hieraus ist ersichtlich, dass die ursprünglich gewählten Strahlenbüschel in keiner Weise gegenüber allen anderen ausgezeichnet sind.

Lehrsatz 3. *Die collineare Verwandtschaft der Ebenen E, E' ist bestimmt, sobald vier Punkten der einen Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, vier Punkte der anderen zugewiesen werden, von denen ebenfalls keine drei in einer Geraden liegen dürfen.*

Denn sollen den Punkten a, b, c, d von E die Punkte a', b', c', d' von E' entsprechen, so beziehe man die Büschel (a) und (a') sowie (b) und (b') so projektivisch auf einander, dass den Strahlen $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ad}$ die Strahlen $\overline{a'b'}$, $\overline{a'c'}$, $\overline{a'd'}$ und den Strahlen $\overline{ba}$, $\overline{bc}$, $\overline{bd}$ die Strahlen $\overline{b'a'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{b'd'}$ entsprechen, wodurch die Projektivität vollständig bestimmt ist, also auch die Collineation, da $\overline{ab}$ dem Strahle $\overline{a'b'}$ entspricht.

Zusatz. Die Collineation ist auch bestimmt, wenn vier Geraden von E vier Geraden von E' zugewiesen werden, doch dürfen keine drei durch einen Punkt gehen. Denn man braucht nur unter den sechs Schnittpunkten von A, B, C, D solche vier auszusuchen, von welchen nicht drei auf einer Geraden liegen und diese den Schnittpunkten der homologen Geraden A', B', C', D' zuzuweisen, wodurch die Collineation bestimmt wird.

Folgerung. Liegen zwei collineare Systeme in einer Ebene, so können keine vier Punkte mit ihren entsprechen-

den coïncidiren, sobald keine drei in einer Geraden liegen. Ebenso können keine vier Geraden mit ihren homologen zusammenfallen, wenn keine drei durch einen Punkt gehen. Denn würden vier Punkte a, b, c, d mit ihren homologen a', b', c', d' sich decken, so würden die Büschel $(a) \barwedge (a')$ und $(b) \barwedge (b')$ congruent sein, und je zwei homologe Strahlen von (a) und (a') sowie von (b) und (b') würden sich decken, also würde auch jeder Punkt der Ebene mit seinem homologen coïncidiren.

§ 2. Die Staudt'sche Definition der Collineation.

Lehrsatz 1. *Sind zwei ebene Systeme E, E' in derartiger Beziehung, dass jeder Geraden G, welche durch den Punkt x von E geht, eine Gerade G' entspricht, die durch x' von E' geht, so sind E, E' in collinearer Verwandtschaft und x, x' sowie G, G' sind homologe Elemente.*

Diesen Lehrsatz stellt v. Staudt in seiner Geometrie der Lage § 10 als Definition der Collineation hin.

Zu Folge der im Vordersatze gemachten Annahme entspricht dem Punkte x, in welchem sich die Geraden G, $\mathfrak{G}$ von E schneiden, der Punkt x', in dem sich die entsprechenden Geraden G', $\mathfrak{G}'$ von E' schneiden, und der Geraden X, welche die Punkte x, $\mathfrak{x}$ verbindet, entspricht die Gerade X', welche die Punkte x', $\mathfrak{x}'$ enthält. Es erübrigt nur noch zu zeigen, dass das gerade Gebilde, welches x auf X beschreibt, projektivisch ist dem geraden Gebilde, welches x' auf X' beschreibt. Dann folgt auch, dass der Strahlenbüschel, den G um einen Punkt g beschreibt, projektivisch ist zum Strahlenbüschel, den G' um g' beschreibt.

Fig. 19. Sei $[a\,c\,b\,d]$ ein harmonisches Quadrupel auf G in E, construirt mittels des Vierecks 1 2 3 4 so, dass die Seiten $\overline{1\,2}$, $\overline{3\,4}$ durch a, $\overline{1\,4}$, $\overline{2\,3}$ durch b gehen, während die Diagonalen $\overline{1\,3}$ resp. $\overline{2\,4}$ die Punkte d resp. c auf G ausschneiden. Zu Folge der festgesetzten Beziehung zwischen den Ebenen E, E' werden, den vier Punkten 1, 2, 3, 4 und den sie paarweise verbindenden sechs Geraden in E, entsprechen vier Punkte $1', 2', 3', 4'$ und die sechs sie paarweise verbindenden Geraden

von E'. Infolge dessen wird der Schnittpunkt von $\overline{1'2'}$ und $\overline{3'4'}$ der Punkt a' sein, welcher a entspricht, ebenso ist der Schnittpunkt von $\overline{1'4'}$ und $\overline{2'3'}$ der Punkt b', welcher b entspricht, und mithin ist die Gerade $\overline{a'b'} = G'$ die entsprechende

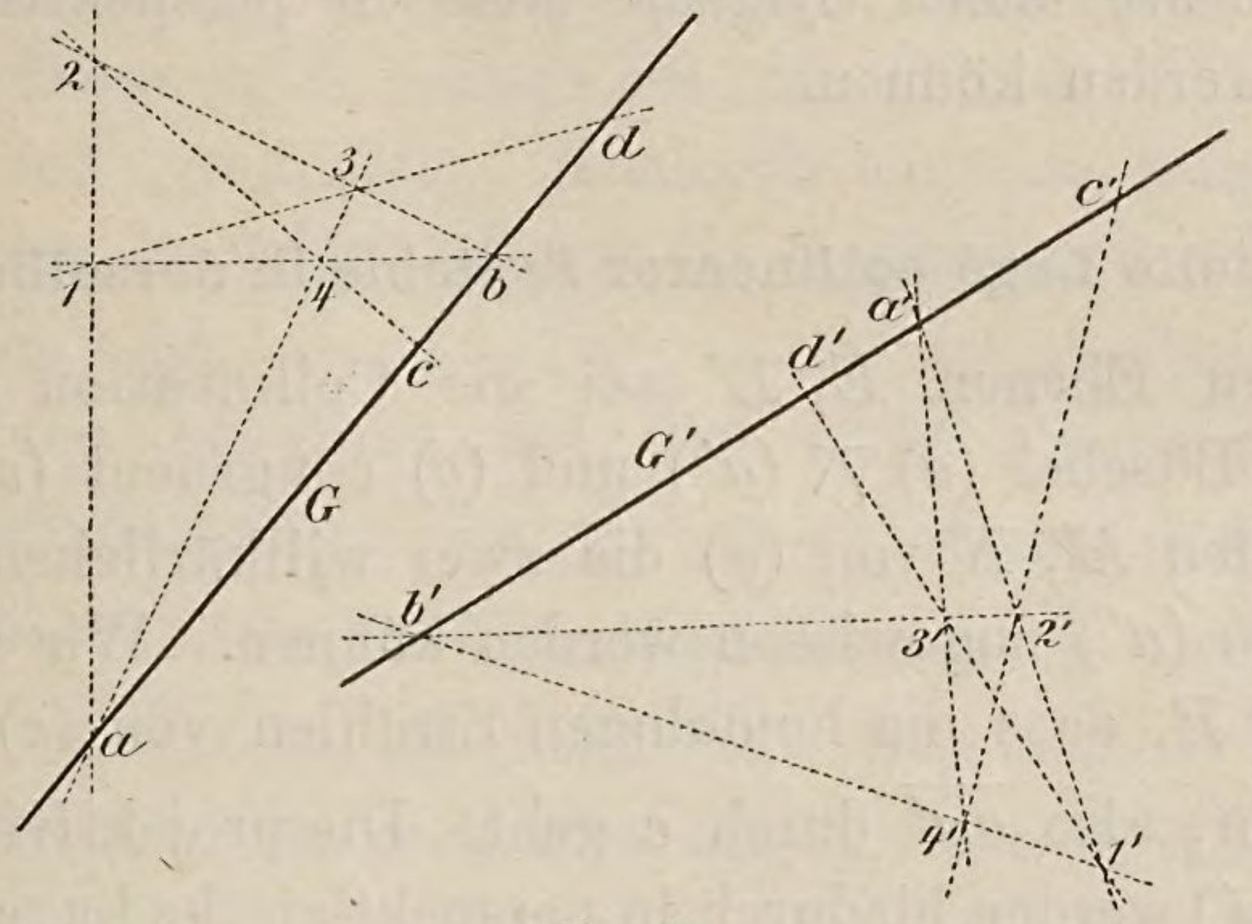


Fig. 19.

zu G. Dann ist aber der Schnittpunkt von $\overline{1'3'}$ resp. $\overline{2'4'}$ mit G' der Punkt d' resp. c', welcher dem Punkte d resp. c entspricht. Hieraus folgt, dass $[a'c'b'd']$ ein harmonisches Quadrupel ist und mithin entspricht in der Beziehung der Ebenen E, E' jedem harmonischen Quadrupel von G ein solches von G'. Nach dem Lehrsatze 8 Kap. I § 3 sind daher die geraden Gebilde auf G und G' projektivisch. Entsprechen nun g und g' sowie $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ einander, so wird $(g) \barwedge (g')$ und $(\mathfrak{g}) \barwedge (\mathfrak{g}')$ in Anbetracht der Strahlen, welche homologe Punkte von $|X|$ projiciren. Da ferner dem Strahle $\overline{g\mathfrak{g}}$ der Strahl $\overline{g'\mathfrak{g}'}$ und dem Strahle $\overline{\mathfrak{g}g}$ der Strahl $\overline{\mathfrak{g}'g'}$ entspricht, so stehen E und E' in collinearer Beziehung.

Folgerung 1. Projicirt man ein ebenes System $\mathfrak{E}$ aus zwei Punkten o, o', die nicht in $\mathfrak{E}$ liegen, auf eine oder zwei Ebenen, so erhält man zwei collineare Systeme E, E'. Homologe Elemente sind solche, welche Projektionen desselben Elementes von $\mathfrak{E}$ sind.

2. Projicirt man das ebene System E aus einem Punkte o, der nicht in E liegt, auf eine nicht durch o gehende Ebene E', so sind E und E' in collinearer Verwandtschaft; die

Elemente, welche Projektionen von einander sind, entsprechen einander. Ist C die Schnittlinie der Ebenen E, E', so ist klar, dass jeder Punkt von C mit seinem homologen coïncidirt. Man nennt zwei so gegeneinander liegende collineare ebene Systeme E, E' *perspektivisch*. Wir werden später zeigen, dass zwei collineare ebene Systeme stets in perspektische Lage gebracht werden können.

§ 3. Specielle Lage collinearer Systeme in derselben Ebene.

In den Ebenen E, E' sei die Collineation bestimmt durch die Büschel $(a) \barwedge (a')$ und (c) congruent (c'), wobei zwei Strahlen M, N von (a) die zwei willkürlichen Strahlen M', N' von (a') zugewiesen werden können. Wir legen nun E' so auf E, dass die homologen Strahlen von (c) und (c') sich decken, also $\overline{aa'}$ durch c geht. Die projektivischen Büschel (a), (a') werden hiedurch in perspektivische Lage gebracht und ihr Erzeugnis C ist die Gerade, welche die Schnittpunkte m, n der Strahlen M, M' resp. N, N' enthält. Jeder Punkt x dieser Geraden coïncidirt mit seinem homologen, denn in ihm schneiden sich die Strahlen $\overline{ax}$, $\overline{cx}$ sowie ihre homologen $\overline{a'x}$ und $\overline{c'x} = \overline{cx}$, da (c), (c') coïndiciren.

Je zwei homologe Geraden der collinearen ebenen Systeme schneiden einander daher auf C, und die Verbindungslinie zweier homologer Punkte geht durch c. Die auf den Strahlen von (c) liegenden projektivischen geraden Gebilde haben ihre Deckpunkte in c und dem Schnittpunkte mit C. Die Strahlenbüschel, deren Centren auf C liegen, haben ihre Deckstrahlen in C und dem Strahle, welcher c enthält.

Man nennt diese specielle Lage collinearer Systeme eine *centrale*, C heisst die *Collineationsaxe*, c das *Collineationscentrum*.

Lehrsatz 1. *Haben zwei collineare ebene Systeme derselben Ebene einen Strahlenbüschel gemeinschaftlich, so coïncidirt auch ein gerades Gebilde mit seinem homologen. Und umgekehrt, haben sie ein gerades Gebilde gemeinschaftlich, so coïncidirt ein Strahlenbüschel mit seinem entsprechenden. Die collinearen ebenen Systeme sind in centraler Lage.*

Der Beweis des Satzes folgt aus dem Vorstehenden.

Die *centrale Collineation*, wie man auch central liegende collineare ebene Systeme nennt, ist bestimmt:

a) Wenn gegeben sind die Collineationsaxe C, das Collineationscentrum c und ein Paar homologer Punkte a, a', die auf einem Strahle von (c) liegen. Denn jeder durch a gehenden Geraden G entspricht die Gerade G' durch a', welche G auf C schneidet. Hiedurch kann zu jedem Punkte x von G der homologe x' von G' bestimmt werden, da er auch auf $\overline{cx}$ liegt.

b) Wenn gegeben sind drei Paar homologe Punkte xx', yy', zz', wobei $\overline{xx'}, \overline{yy'}, \overline{zz'}$ durch einen Punkt c gehen müssen. Denn ist m der Schnittpunkt von $\overline{xy}$ und $\overline{x'y'}$ und n der von $\overline{xz}$, $\overline{x'z'}$, so ist eine Collineation nach a) bestimmt, für die c Centrum, $\overline{mn} = C$ Axe und x, x' ein Paar homologer Punkte sind. In dieser werden aber auch y, y' und z, z' einander entsprechen. Schneiden einander $\overline{yz}$, $\overline{y'z'}$ in o, so muss o auf C liegen, daher folgt:

Liegen zwei Dreiecke xyz und $x'y'z'$ so, dass die Geraden $\overline{xx'}, \overline{yy'}, \overline{zz'}$ durch einen Punkt c gehen, und schneiden sich die drei Paar Seiten $\overline{xy}, \overline{x'y'}$ in m, $\overline{xz}, \overline{x'z'}$ in n und $\overline{yz}, \overline{y'z'}$ in o, so liegen m, n, o in einer Geraden.

c) Wenn gegeben sind drei Paare homologer Geraden X, Y, Z und X', Y', Z' jedoch müssen sich XX', YY', ZZ' in drei Punkten einer Geraden C schneiden. Denn sind x, y, z die Schnittpunkte von YZ, XZ, XY und analog x', y', z' die von $Y'Z', X'Z', X'Y'$, so mögen sich $\overline{xx'}$ und $\overline{yy'}$ in c schneiden. Es bestimmen nun c und C als Centrum und Axe und x, x' als ein Paar homologer Punkte nach a) eine centrale Collineation, in der XX', YY', ZZ' homologe Geraden sind. Da auch y, y' und z, z' homologe Punkte werden, so muss $\overline{zz'}$ durch c gehen und daher folgt:

Hat man zwei Dreiecke xyz und $x'y'z'$, deren Seiten $\overline{xy}, \overline{x'y'}$ sich in m, $\overline{xz}, \overline{x'z'}$ in n und $\overline{yz}, \overline{y'z'}$ in o schneiden und liegen m, n, o auf einer Geraden C, so gehen die Geraden $\overline{xx'}, \overline{yy'}, \overline{zz'}$ durch einen Punkt c.

Man nennt die Lage zweier Dreiecke, xyz und $x'y'z'$, wie sie in b) und c) betrachtet wurde, *perspektivisch.*

Fig. 20. Es sei C die Collineationsaxe, c das Centrum und a, a' ein Paar homologer Punkte, dann sind G, G', die sich auf C in m schneiden und durch a resp. a' gehen, homologe Gerade. Die durch c zu G' parallel gezogene Gerade $\mathfrak{G}$ wird nach Kap. I § 2 Folg. 1 die Gerade G in dem Punkte v schneiden, welcher dem unendlich fernen Punkte v'_∞ von G' entspricht. Lässt man nun G' den Büschel (a') beschreiben, so wird G den Büschel (a) und $\mathfrak{G}$ den zu beiden projektivischen Büschel (c) durch-

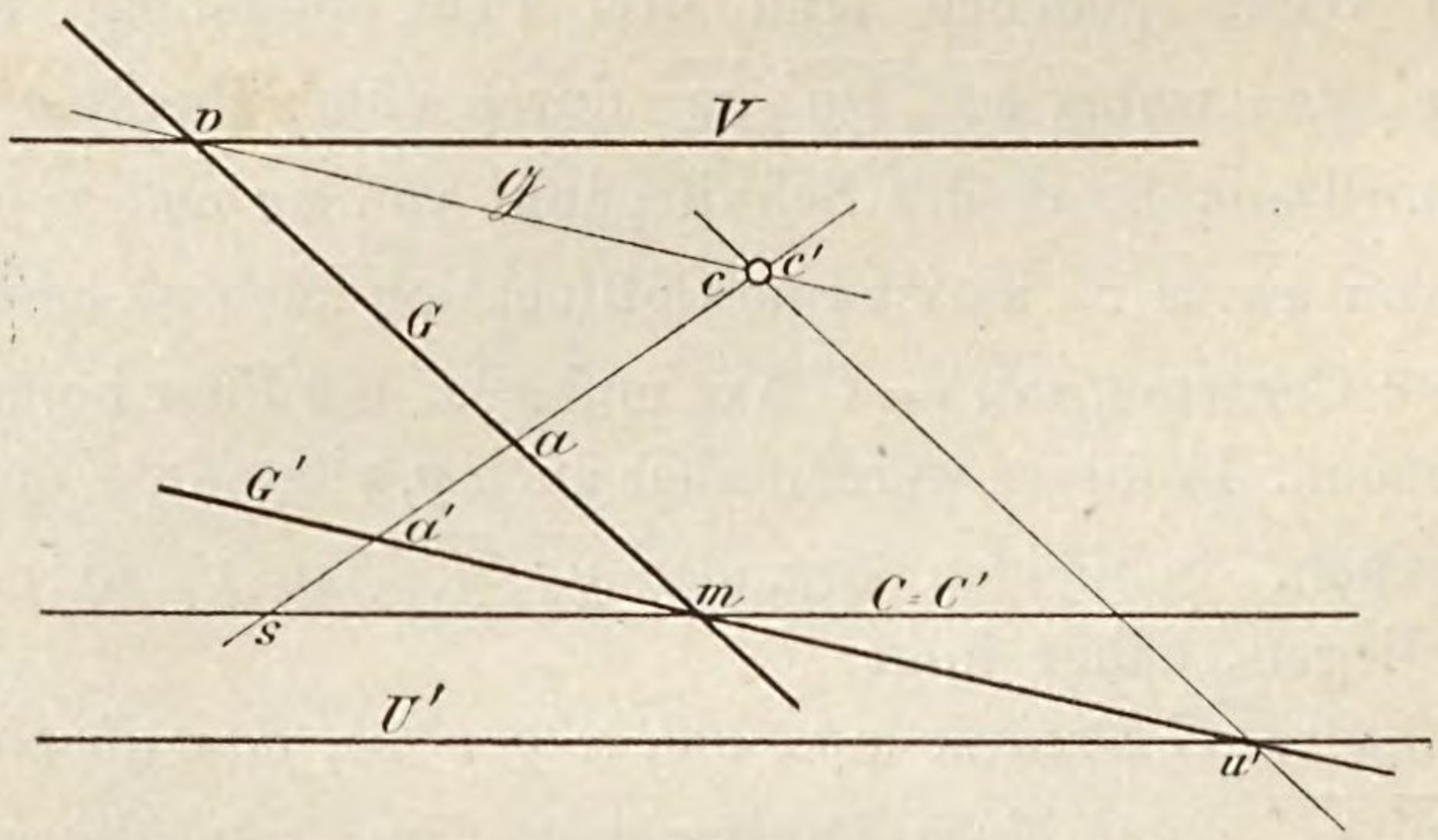


Fig. 20.

laufen. Da (a) zu (c) perspektivisch liegt, denn $\overline{ca}$ ist beiden gemeinschaftlich, so ist der Ort der Punkte v eine Gerade V, welche mithin die homologen Punkte der unendlich fernen Punkte von E' enthält. V ist die homologe Gerade der unendlich fernen Geraden V'_∞ von E' (vgl. Kap. I. § 2). V ist parallel zu C, da G' und G gleichzeitig mit $\mathfrak{G}$ parallel werden, wenn m ins Unendliche rückt. Ebenso tritt eine Gerade U' auf, die die homologe zu U_∞ von E ist, und die auch zu C parallel ist. Auf ihr liegen die Punkte u', in denen G' von der zu G durch c gezogenen Parallelen getroffen wird.

V und U' heissen Gegenlinien der Collineation. Aus dem Parallelogramm $vcu'm$ ersieht man, dass auf jedem Strahle durch c die Strecken, welche c und C, sowie V und U' auf ihm begränzen, dieselbe Mitte haben.

Fällt V mit U' zusammen, so heisst die Collineation involutorisch, je zwei Punkte a, a' der Ebene entsprechen

einander involutorisch, indem die homologen Punkte auf den Strahlen durch c eine Involution bilden. $V = U'$ muss dann in der Mitte zwischen c und C verlaufen.

Es kann speciell c auch auf C fallen, wodurch die Collineation nicht wesentlich alterirt wird. C verläuft dann in der Mitte zwischen V und U'.

Anmerkung. Durch die Collineationsaxe C, das Centrum c und eine der Gegenlinien V oder U' ist die Collineation auch bestimmt, nach a). Liegt c im Unendlichen, also auch V und U', so heissen die ebenen Systeme *affin*, die unendlich fernen Geraden beider Ebenen sind homolog. Liegt c im Endlichen, C aber im Unendlichen, also auch V und U', so sind die ebenen Systeme *ähnlich* und *ähnlich liegend*, indem je zwei homologe Gerade einander parallel werden, c ist das Aehnlichkeitscentrum. Liegt sowol c als C im Unendlichen, so sind die ebenen Systeme *congruent*.

Affinität, *Aehnlichkeit* und *Congruenz* ebener Systeme sind mithin specielle Collineationen.

Lehrsatz 2. *Von zwei central collinearen Systemen E, E' lässt sich das eine z. B. E' als Projektion des anderen E aus einem Punkte o des Raumes auf die Ebene von E' betrachten.*

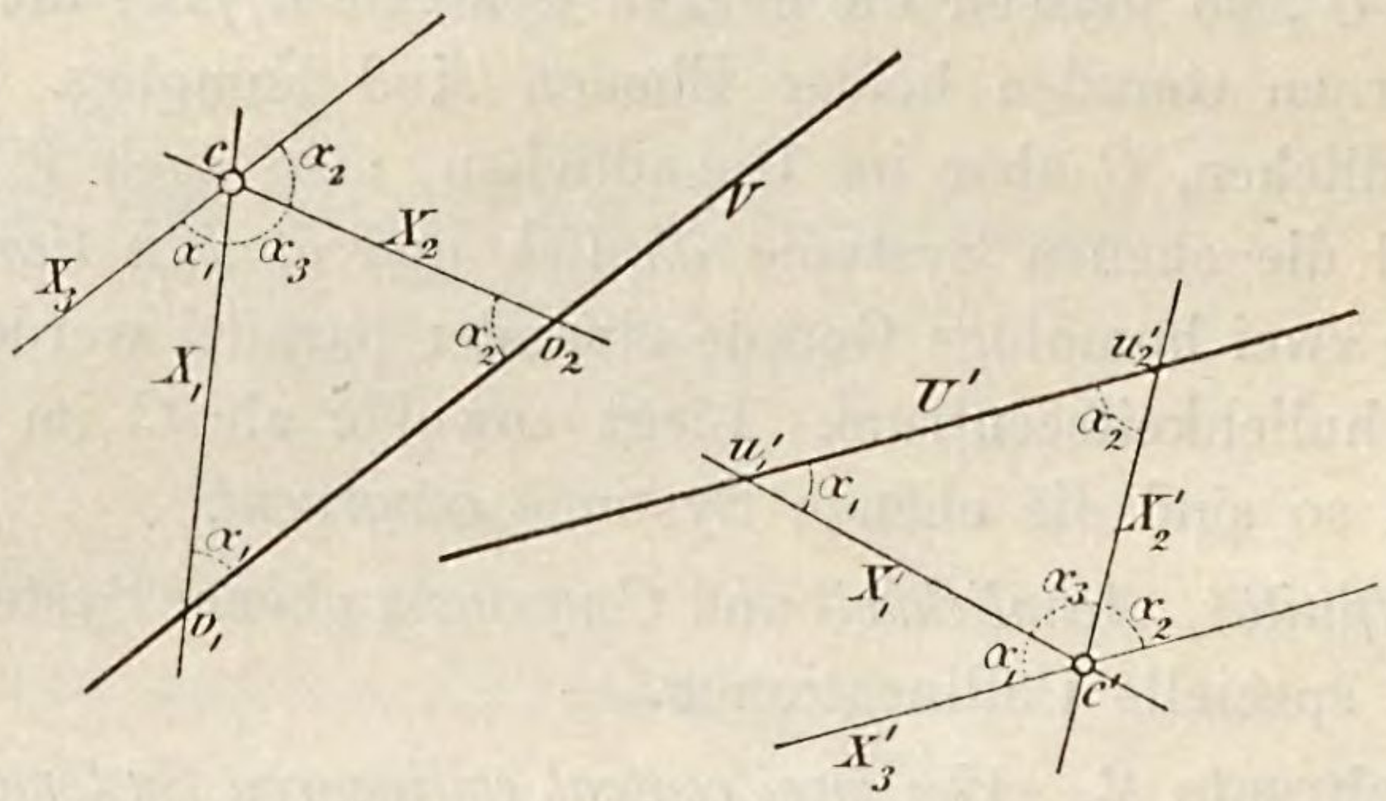
Denken wir uns E um irgend einen Winkel aus der gemeinschaftlichen Ebene beider Systeme um die Collineationsaxe C herausgedreht in die Lage E_1, so dass c nach c_1 gelangt, während der zurückbleibende Punkt $c = c'$ in E' mit c' bezeichnet werden mag. Es seien dann a, a' ein Paar homologer Punkte und a gelange nach a_1, so schneiden sich $\overline{c_1 c'}$ und $\overline{a_1 a'}$ in einem Punkte o, da $\overline{c_1 a_1}$ und $\overline{c' a'}$ sich auf C treffen. Projicirt man nun E_1 auf E', so erhält man ein ebenes System E_1', welches zu E' collinear ist, da E' zu E, also auch zu E_1 collinear ist und E_1' die Projektion von E_1 aus o ist. Die collinearen ebenen Systeme E', E_1' haben aber in C ein gerades Gebilde gemeinschaftlich, und da c', a' mit ihren homologen c_1', a_1', der Projektion von c, a, zusammenfallen, so ist E_1' mit E' identisch, nach der Folgerung zum Lehrsatze 3 des § 1.

Lehrsatz 3. *In zwei collinearen ebenen Systemen E und*

E′ gibt es stets zwei einander entsprechende congruente Strahlenbüschel.

Der unendlich fernen Geraden V'_∞ von E' möge die Gerade V von E und der U_∞ von E die Gerade U' von E' entsprechen. (Der Fall, dass $V = U_\infty$ ist, wird später berücksichtigt und sei daher hier ausgeschlossen.) Dem Strahlenbüschel (v_1), dessen Centrum auf V liegt, entspricht ein Parallelstrahlenbüschel in E', dessen Strahlen mit U' den constanten Winkel α_1 bilden. Es möge nun X_1 durch v_1 gehen

Fig. 21.



und mit V den Winkel α_1 bilden, X_1' sei der entsprechende Strahl in E'. Wird in derselben Weise ein zweites Paar homologer Geraden X_2, X_2' bestimmt, welche mit V resp. U' dieselben Winkel α_2 bilden, so schneiden sich X_1, X_2 in c und X_1', X_2' in dem homologen Punkte c', welche Centren congruenter Strahlenbüschel sind. Denn zieht man durch c die X_3 parallel zu V, so entspricht ihr die Gerade X_3', welche durch c' parallel zu U' gelegt ist, und man ersieht, dass die projektivischen Strahlenbüschel

$$c(X_1\, X_2\, X_3 \ldots) \quad \text{und} \quad c'(X_1'\, X_2'\, X_3' \ldots)$$

congruent sind, indem die drei Strahlen

$$X_1,\ X_2,\ X_3 \quad \text{und} \quad X_1',\ X_2',\ X_3'$$

je gleiche Winkel mit einander einschliessen.

Anmerkung. Die Willkürlichkeit in der Abtragung des Winkels α_1 resp. α_2 an v_1 und v_2 lässt erkennen, dass man zwei Punkte c erhält, denen zwei Punkte c' entsprechen.

Folgerung 1. Je zwei collineare ebene Systeme können

in central collineare Lage gebracht werden. Man hat nur die oben gefundenen congruenten Strahlenbüschel (c) und (c') so auf einander zu legen, dass homologe Strahlen sich decken.

2. Je zwei collineare ebene Systeme können als Centralprojektion von einander angesehen werden. Nach Lehrsatz 2 zu Folge des eben Gesagten.

Ist $V = U_\infty$ d. h. entsprechen einander die unendlich fernen Geraden der ebenen Systeme, so sind dieselben entweder *affin* oder *ähnlich* (speciell *congruent*). Sind sie affin, so können sie *nicht stets* in eine Ebene so gelegt werden, dass die Verbindungsgeraden homologer Punkte zu einander parallel sind, oder durch einen Punkt im Endlichen gehen. Denn legt man E, E' auf einander, so liegen dann stets zwei homologe Gerade, nämlich die unendlich fernen U_∞, U'_∞ auf einander, und sie können daher nur dann in centrale Lage gebracht werden, wenn *entweder* die projektivischen geraden Gebilde auf U_∞ und U'_∞ einander congruent sind, d. h. wenn homologe Strahlenbüschel congruent, also einander entsprechende Winkel gleich sind, wo dann Aehnlichkeit stattfindet (die centrale Lage ist leicht zu bewirken) *oder* ein Parallelstrahlenbüschel (u_∞) von U_∞ congruent dem homologen (u'_∞) von U'_∞ ist.

Um zu erkennen, ob zwei affine ebene Systeme in centrale Lage gebracht werden können, lege man dieselben so auf einander, dass sich in $a = a'$ zwei homologe Punkte und in $A = A'$ zwei homologe Gerade, welche $a = a'$ enthalten, decken. Dann möge der Geraden B, die zu A parallel ist, die Gerade B' entsprechen. Homologe Strahlen der Büschel $(a) \barwedge (a')$ schneiden B und B' in ähnlichen Punktreihen, die perspektivisch liegen, und deren Perspektivitätscentrum β sei. (β fällt nur dann in $a = a'$, wenn Aehnlichkeit zwischen den ebenen Systemen stattfindet, indem dann die Büschel (a) und (a') sich decken.) Beschreibt man über $a\beta$ als Durchmesser den Kreis $\mathfrak{K}$, so

Fig. 22.

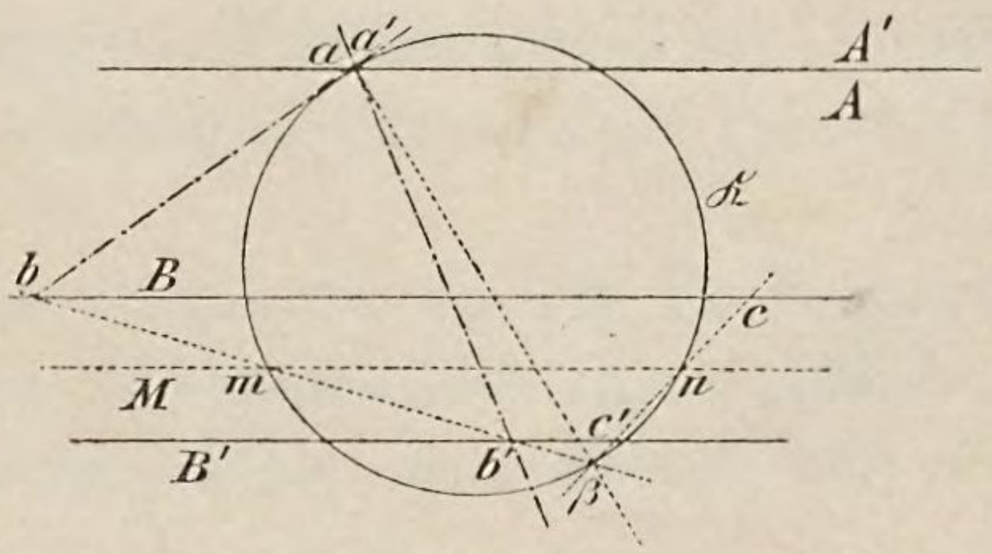


Fig. 22.

möge er die Gerade M, welche in der Mitte zwischen B und B' verläuft, in m und n schneiden. Die Strahlen $\overline{\beta m}$ und $\overline{\beta n}$ bestimmen auf B und B' je ein Paar homologer Punkte b, b' und c, c'. Da dann $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'}$ homologe Gerade sind, und $ab = a'b'$ ist, so sind die geraden Gebilde auf $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'}$ congruent (zu Folge der Relation (2) auf Seite 6). Dreht man nun die Ebene E so um $a = a'$, dass ab mit $a'b'$ zusammenfällt, so haben E und E' das gerade Gebilde auf $\overline{ab} = C$ gemeinschaftlich und liegen central. Homologe Punkte liegen auf Strahlen eines Parallelbüschels (c_∞). [Eine zweite centrale Lage erhält man, wenn $\overline{ac}$ mit $\overline{a'c'}$ zur Deckung gebracht wird.] Dreht man E um C aus der gemeinschaftlichen Ebene heraus, so folgt leicht, dass E' die Parallelprojektion von E ist.

Schneidet der obige Kreis $\mathfrak{K}$ die Gerade M nicht, so können E und E' nicht in centrale Lage gebracht werden.

III. Kapitel.

Der Kegelschnitt. — Seine Construktion. — Projektivische Gebilde auf demselben. — Pol und Polare.

§ 1. Die Centralprojektion des Kreises.

Aus den Elementen der Geometrie des Kreises sind folgende zwei Sätze bekannt: Verbindet man zwei feste Punkte a, b eines Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem variablen Punkte x desselben und nennt die Strahlen $\overline{ax}$, $\overline{bx}$ homolog, so werden je zwei Strahlen des Büschels (a) denselben Winkel einschliessen, wie die homologen Strahlen des Büschels (b). Da auch der Strahl $\overline{ax}$ den Büschel (a) in demselben Sinne, wie $\overline{bx}$ den Büschel (b) durchläuft, so werden die Strahlenbüschel in a und b in Anbetracht der homologen Strahlen congruent und gleichsinnig. Hat man umgekehrt zwei congruente gleichsinnige Strahlenbüschel (a) und (b), so schneiden sich homologe Strahlen unter constantem Winkel, daher liegt ihr Schnittpunkt auf einem Kreise durch a und b. Da congruente Strahlenbüschel auch projektivisch sind, so folgt aus dem Vorstehenden die Richtigkeit des folgenden

Lehrsatzes 1. *Der Kreis $\mathfrak{K}$ ist das Erzeugnis zweier projektivischer Strahlenbüschel, deren Centren irgend zwei Punkte a, b desselben sind, und deren homologe Strahlen die Punkte von $\mathfrak{K}$ projiciren.*

Man beachte, dass dem Strahle $\overline{ba}$ von (b) die Tangente von $\mathfrak{K}$ in a als homolog im Strahlenbüschel (a) zugehört.

Definition. *Die Centralprojektion eines Kreises auf eine Ebene heisst Kegelschnitt.*

Daher: *Die Collinearfigur eines Kreises ist ein Kegelschnitt K.* Derselbe wird durch zwei projektivische Büschel (a) und (b)

erzeugt, deren Centren auf K willkürlich sind. Dem Strahle $\overline{ba}$ des Büschels (b) entspricht in (a) die Tangente des Kegelschnittes K im Punkte a und dem Strahle $\overline{ab}$ von (a) entspricht in (b) die Tangente von K im Punkte b.

Lehrsatz 2. *Durch fünf beliebige Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, kann man stets einen Kegelschnitt legen.*

Fig. 23. Sind a', b', c', d', e' die fünf willkürlich gewählten Punkte, so haben wir nur zu zeigen, dass wir die Ebene E' dieser fünf Punkte so auf eine Ebene E collinear abbilden

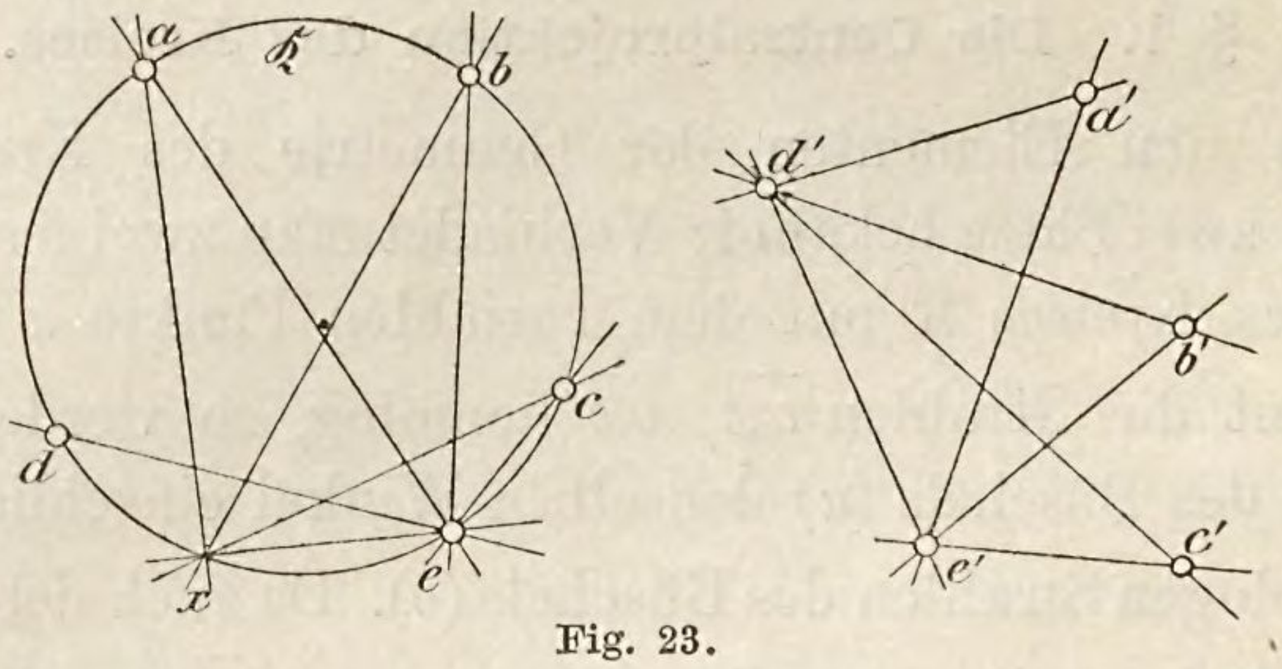


Fig. 23.

können, dass den fünf Punkten a', b', c', d', e' fünf Punkte eines Kreises entsprechen. Sei nun $\mathfrak{K}$ ein Kreis der Ebene E, und a, b, c drei seiner Punkte, die in der zu bestimmenden Collineation den Punkten a', b', c' entsprechen sollen. Man nehme auf $\mathfrak{K}$ den Punkt x willkürlich an und bestimme den Punkt e auf $\mathfrak{K}$ so, dass der Strahlenbüschel

$$(1) \qquad x(abce) \barwedge d'(a'b'c'e'),$$

wodurch der Strahl $\overline{xe}$, also auch e, vollständig bestimmt ist. Nun construire man wieder den Punkt d auf $\mathfrak{K}$ so, dass der Strahlenbüschel

$$(2) \qquad e(abcd) \barwedge e'(a'b'c'd'),$$

wodurch wieder ed, also auch d, unzweideutig festgelegt ist. Da x und d auf $\mathfrak{K}$ liegen, so ist nach dem Lehrsatze 1:

$$x(abce) \barwedge d(abce),$$

also zu Folge (1) auch

$$(3) \qquad d(abce) \barwedge d'(a'b'c'e').$$

Die Beziehungen (2) und (3) lassen erkennen, dass die Büschel (e), (d) von E und (e'), (d') von E' eine Collineation beider Ebenen vermitteln, in der den Punkten a', b', c', d', e' von E' die fünf Punkte a, b, c, d, e von E entsprechen, die auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ liegen. Die Collinearfigur von $\mathfrak{K}$ geht also durch a', b', c', d', e'.

Folgerung 1. Zwei projektivische Büschel, die nicht perspektivisch liegen, erzeugen einen Kegelschnitt als Ort der Schnittpunkte homologer Strahlen. Denn schneiden sich drei Paar homologe Strahlen der Büschel (a') und (b') in c', d', e' und ist x' ein Schnittpunkt irgend eines vierten Paares homologer Strahlen, so ist

$$a'(c'd'e'x') \barwedge b'(c'd'e'x').$$

Durch die fünf Punkte a', b', c', d', e' kann nun nach Lehrsatz 2 ein Kegelschnitt K' gelegt werden, und da dieser das Erzeugnis zweier projektivischer Büschel (a') und (b') ist, deren drei Paar homologe Strahlen die Punkte c', d', e' projiciren, so liegt auf K' auch der Punkt x'.

2. Durch fünf willkürlich gewählte Punkte ist *ein einziger* Kegelschnitt vollständig bestimmt, sobald keine drei auf einer Geraden liegen. Denn sind a', b', c', d', e' gegeben, so sind die Büschel

$$a'(c'd'e'x') \barwedge b'(c'd'e'x')$$

vollständig bestimmt, also auch ihr Erzeugnis.

Der Kegelschnitt ist mithin auch durch irgend fünf auf ihm gewählter Punkte bestimmt.

3. Verbindet man irgend zwei feste Punkte x, y eines Kegelschnittes K mit einem variablen Punkte z desselben, so beschreiben die Strahlen $\overline{xz}$ und $\overline{yz}$ zwei projektivische Strahlenbüschel (x) und (y). Dem Strahle $\overline{xy}$ von (x) entspricht in (y) die Tangente von K im Punkte y, und dem Strahle yx von (y) analog die Tangente in x von K.

4. Die Collinearfigur eines Kegelschnittes K ist wieder ein Kegelschnitt K'. Denn die Büschel $(a) \barwedge (b)$, welche K erzeugen, haben zu Collinearfiguren die Büschel $(a') \barwedge (a)$ und $(b') \barwedge (b)$, also ist auch $(a') \barwedge (b')$ und diese erzeugen K', die Collinearfigur von K.

5. Eine Gerade G der Ebene des Kegelschnittes K kann diesen höchstens in zwei Punkten schneiden. Denn die Strahlenbüschel (x) und (y), welche die Punkte z von K projiciren, schneiden G in zwei projektivischen Punktreihen, welche höchstens zwei Deckelemente g, h besitzen, die, wenn sie vorhanden sind, Punkte des Kegelschnittes sind.

Jede Gerade G, welche aber einen Punkt t von K enthält, schneidet K noch in einem Punkte s, denn da die projektivischen Punktreihen auf G in t ein Deckelement besitzen, so haben sie notwendig noch ein zweites s, welches auch auf K liegt. Oder auch: man lasse y auf t fallen, dann wird G ein Strahl von $(y) = (t)$, welcher von dem homologen Strahl des Büschels (x) in s auf K geschnitten wird.

In einer besonderen Lage von G könnte s auf t fallen, dann ist G Tangente von K in t, denn sie entspricht dann dem Strahle $\overline{xt}$ von (x). Die Tangenten von K schneiden daher den Kegelschnitt nur im Berührungspunkte.

Anmerkung. Liegen die projektivischen Büschel (a') und (b') perspektivisch, so schneiden sich homologe Strahlen in Punkten einer Geraden T. Der Strahl $\overline{a'b'} = S$ entspricht dem Strahle $\overline{b'a'} = S$, so dass jeder Punkt von S als Schnittpunkt der beiden homologen Strahlen $\overline{a'b'}$ und $\overline{b'a'}$ angesehen werden kann. Die beiden Geraden S und T zusammengenommen sind also der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlen der Büschel (a') und (b'). Aus diesem Grunde nennt man S und T zusammengenommen einen zerfallenen Kegelschnitt. S und T können irgend zwei Gerade der Ebene sein.

§ 2. Construktion des Kegelschnittes durch seine Punkte.

Sind die beiden projektivischen Büschel (a) und (b) gegeben, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^K$ erzeugen, so hat man die Büschel nur zu vervollständigen, um die Punkte des Kegelschnittes K zu erhalten. Diese Vervollständigung führen wir
Fig. 24. auf nachstehende Art aus. Es seien a und b die Scheitel der Büschel und $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ ein Paar homologe Strahlen d. h. c ein Punkt von K. Wir denken uns nun den Büschel (a)

durch $\overline{bc}$ und den Büschel (b) durch $\overline{ac}$ geschnitten, dann werden die geraden Gebilde auf $\overline{bc}$ und $\overline{ac}$ einander projektivisch sein, und da in c ein sich selbst entsprechender Punkt beider liegt, sind die geraden Gebilde in perspektivischer

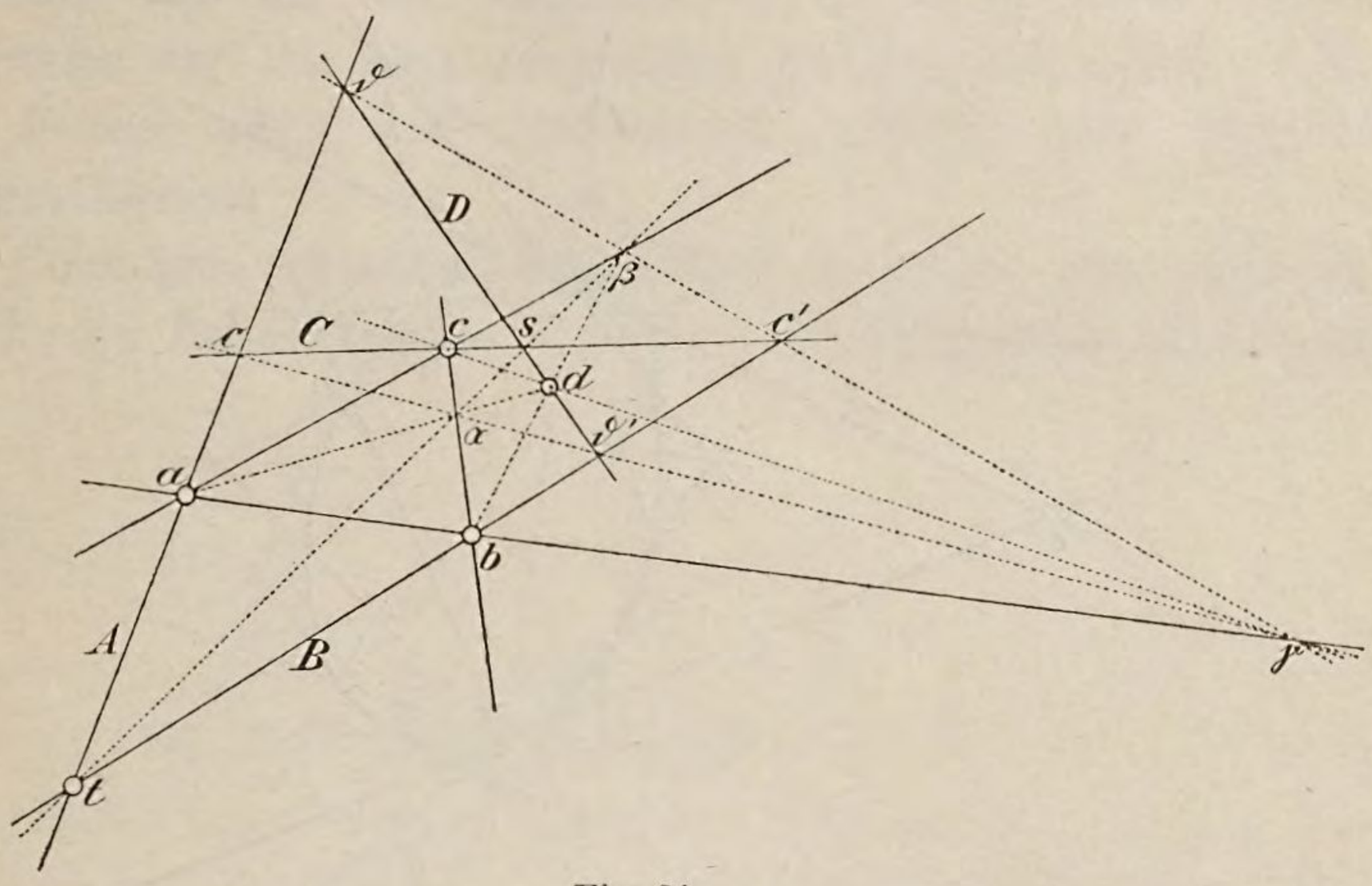


Fig. 24.

Lage. Ist t ihr Perspektivitätscentrum, so schneidet jeder Strahl durch t die Geraden $\overline{bc}$ und $\overline{ac}$ in α resp. β so, dass $\overline{a\alpha}$ und $\overline{b\beta}$ sich in einem Punkte d von K schneiden.

Fällt α auf b und schneidet $\overline{tb}$ die Gerade $\overline{ac}$ in β', so ist $\overline{t\beta'} = \overline{tb}$ der Strahl in (b), welcher dem Strahle $\overline{ab}$ von (a) entspricht d. h. *$\overline{tb}$ ist Tangente von K in b. Ebenso ist $\overline{ta}$ Tangente in a und es ist mithin das Perspektivitätscentrum t der Schnittpunkt der Tangenten von K in den Punkten a und b.*

Hieraus folgt, dass t sich nicht ändert, wenn a und b festgehalten werden, an Stelle von c aber irgend ein anderer Punkt von K genommen wird. (Vergleiche auch den Zusatz zu Aufgabe 2 auf pag. 13.)

1. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist zu construiren, d. h. beliebig viele seiner Punkte sind zu zeichnen, wenn von demselben gegeben sind drei Punkte a, b, c und die Tangenten A, B in zweien a, b derselben. Die Ausführung zeigt Fig. 25. Man lasse den Strahl $\overline{t\alpha\beta}$ den Strahlenbüschel (t) durchlaufen und bestimme die Schnittpunkte d der Strahlen $\overline{a\alpha}$ und $\overline{b\beta}$. Fig. 25.

Hierbei kann, wenn α oder β nicht in einen bequem zugänglichen Theil der Ebene fallen sollten, an Stelle der Geraden $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ irgend ein anderes Geradenpaar $\overline{ad}$ und $\overline{bd}$ genommen werden, wenn d einer der bereits construirten Punkte ist.

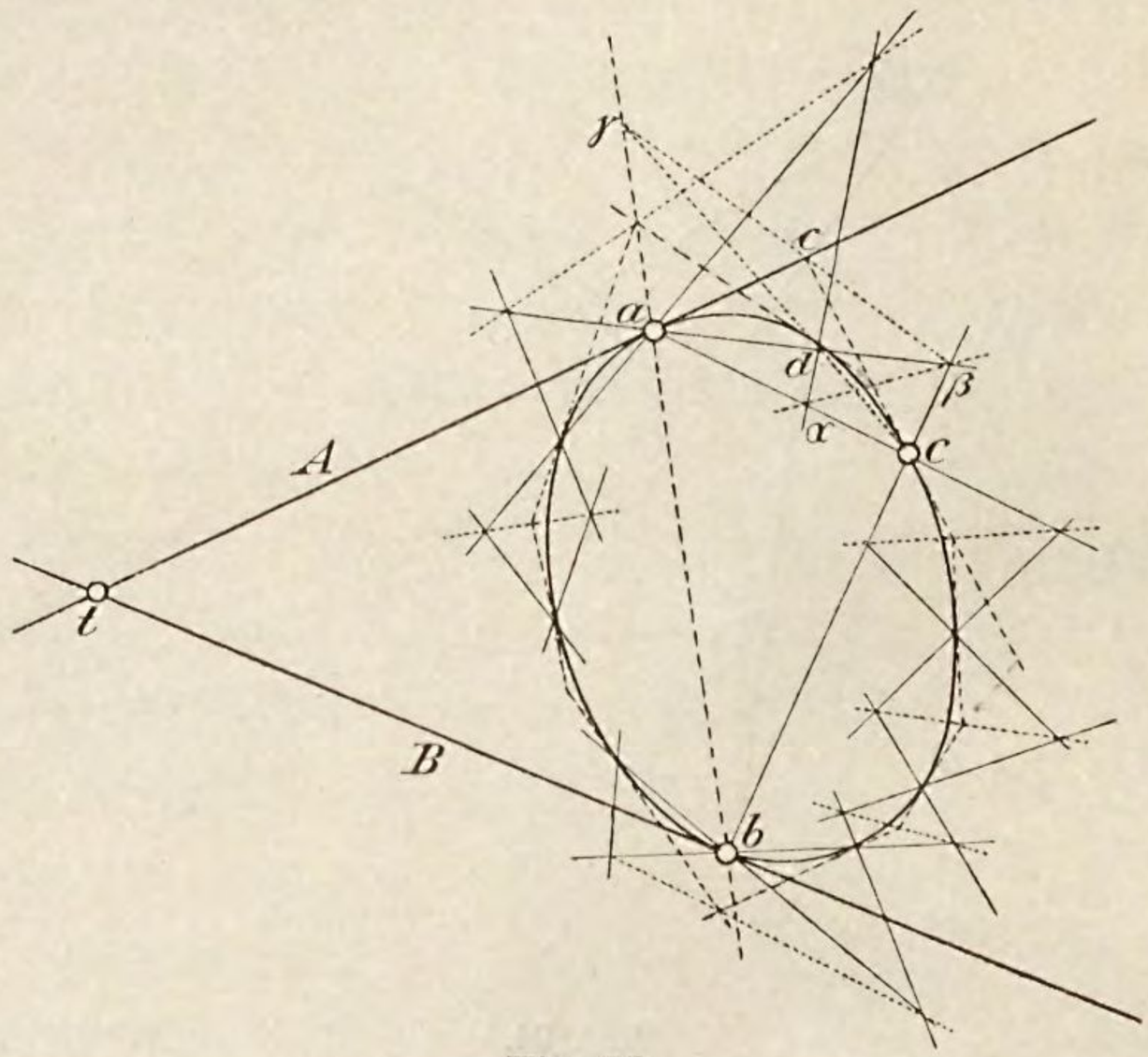


Fig. 25.

Man beachte, dass es nicht nöthig ist, dass alle Punkte a, b, c im Endlichen liegen, die Construktion ist immer durchführbar. Nimmt man z. B. an a und b liegen im Unendlichen, ihre Tangenten A, B heissen dann Asymptoten, so führt die Construktion des so bestimmten Kegelschnittes auf eine sehr bekannte Construktion der Hyperbel, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Die vorstehende Construktion des Kegelschnittes aus drei Punkten und zwei Tangenten in zweien derselben wollen wir *Fundamentalconstruktion* nennen und späterhin jede Construktion eines Kegelschnittes soweit ausführen, bis diese Bestimmungsstücke sich ergeben.

Fig. 24. Wir sahen, dass wenn a, b, c, d vier Punkte eines Kegelschnittes sind und $\overline{ac}$, $\overline{ad}$ von den Geraden $\overline{bc}$, $\overline{bd}$ in α, β geschnitten werden, dass dann die Gerade $\overline{\alpha\beta}$ durch den Schnittpunkt der Tangenten von K in a und b geht. Daher muss $\overline{\alpha\beta}$ auch durch den Schnittpunkt s der Tangenten in c und d gehen, wie ohne Weiteres klar, wenn man sich K durch die Büschel (c) und (d) erzeugt denkt.

Da $\overline{\alpha\beta}$ eine Diagonale des vollständigen Viereckes $abcd$ ist, dessen Ecken auf K liegen, so können wir den Satz so aussprechen:

Sind a, b, c, d vier Punkte eines Kegelschnittes K, so schneiden sich die vier Tangenten A, B, C, D dieser Punkte paarweise auf den drei Diagonalen des Viereckes $abcd$. Oder das Viereck $abcd$ und das Vierseit $ABCD$ haben dasselbe Diagonaldreieck.

Schneiden einander $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ in γ, so geht eben $\overline{\gamma\alpha}$ durch die Schnittpunkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}'$ der Tangenten A, C und Fig. 24.

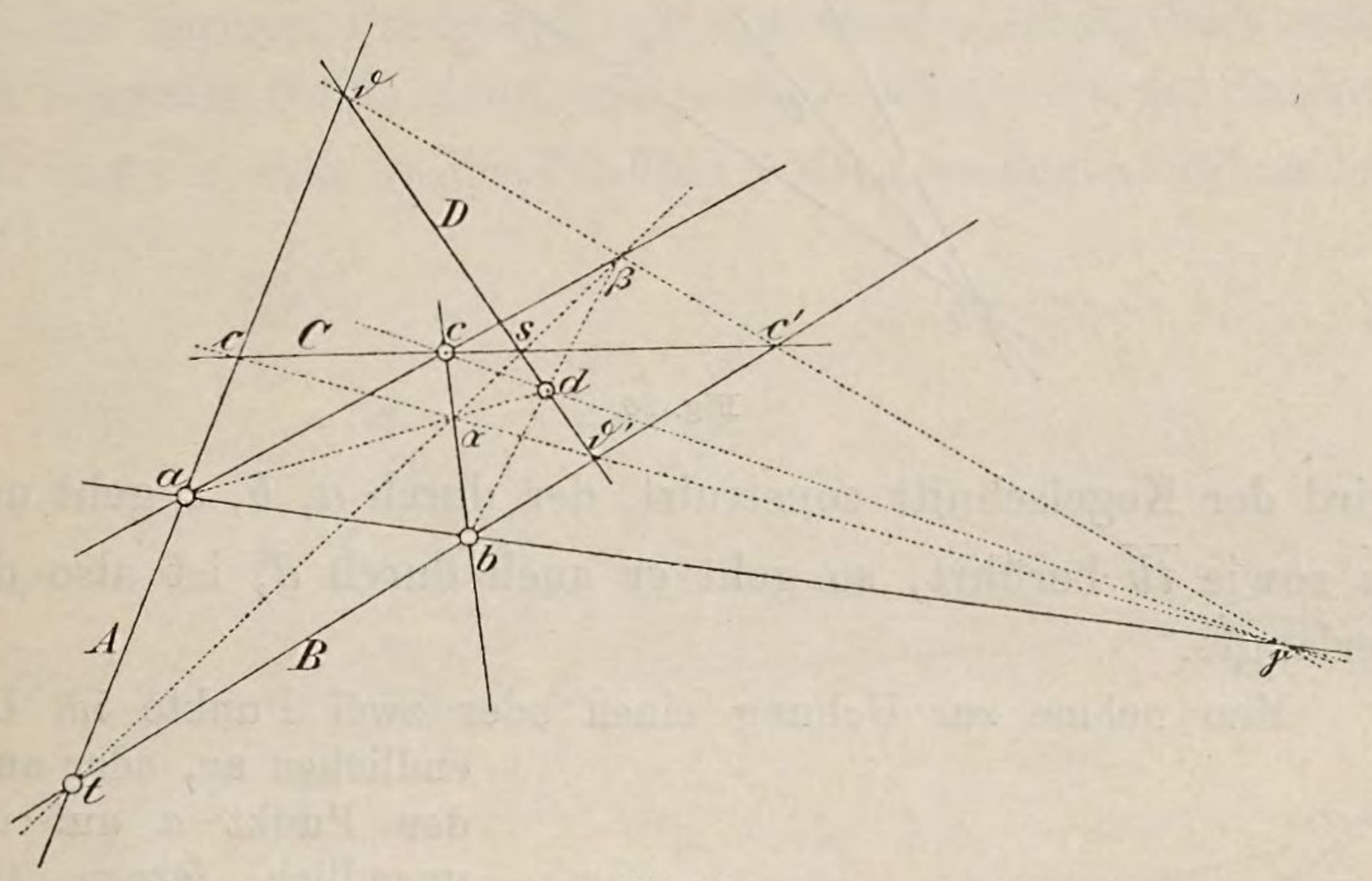


Fig. 24.

B, D, während $\overline{\gamma\beta}$ durch die Schnittpunkte $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}'$ der Tangenten A, D und B, C geht.

Hat man hiernach den Punkt d construirt und γ bestimmt, so liefern $\overline{\gamma\alpha}$ oder $\overline{\gamma\beta}$ die Tangenten C und D in c und d. Die Geraden C und D müssen sich in s auf $\overline{\alpha\beta}$ schneiden. Hält man c, also auch C fest, lässt d den Kegelschnitt beschreiben, so sieht man, dass s die Tangente C durchläuft, und dass $\overline{sd}$ stets die Tangente von K in d wird. Man hat also zu jedem construirten Punkte von K auch seine Tangente ohne Weiteres gegeben. In Fig. 25 ist diese Construktion ersichtlich gemacht.

2. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist zu construiren, von dem gegeben sind vier Punkte a, b, c, d und die Tangente

Fig. 26. A in a. In Figur 26 ist die Construktion ersichtlich gemacht, indem der Punkt t construirt wurde, der auf A und $\overline{\alpha\beta}$ liegt, wenn $\overline{ad}$, $\overline{ac}$ von $\overline{bd}$, $\overline{bc}$ in α, β geschnitten werden. Denn

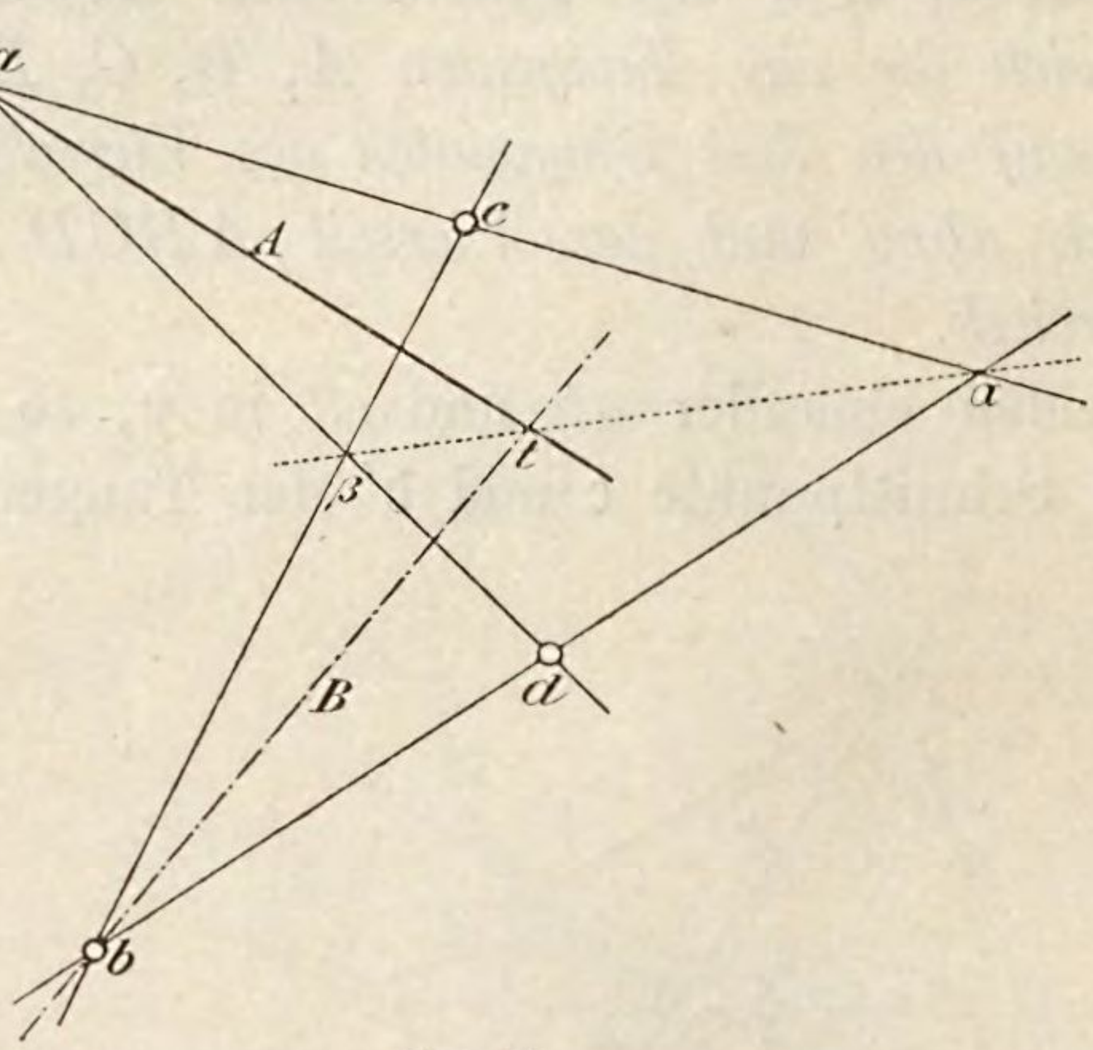


Fig. 26.

wird der Kegelschnitt construirt, der durch a, b, c geht und $\overline{ta}$ sowie $\overline{tb}$ berührt, so geht er auch durch d, ist also der verlangte.

Man nehme zur Uebung einen oder zwei Punkte im Unendlichen an, oder auch den Punkt a auf der unendlich fernen Geraden A, so dass diese den Kegelschnitt berührt; die Construktion ist stets in bestimmter Weise ausführbar.

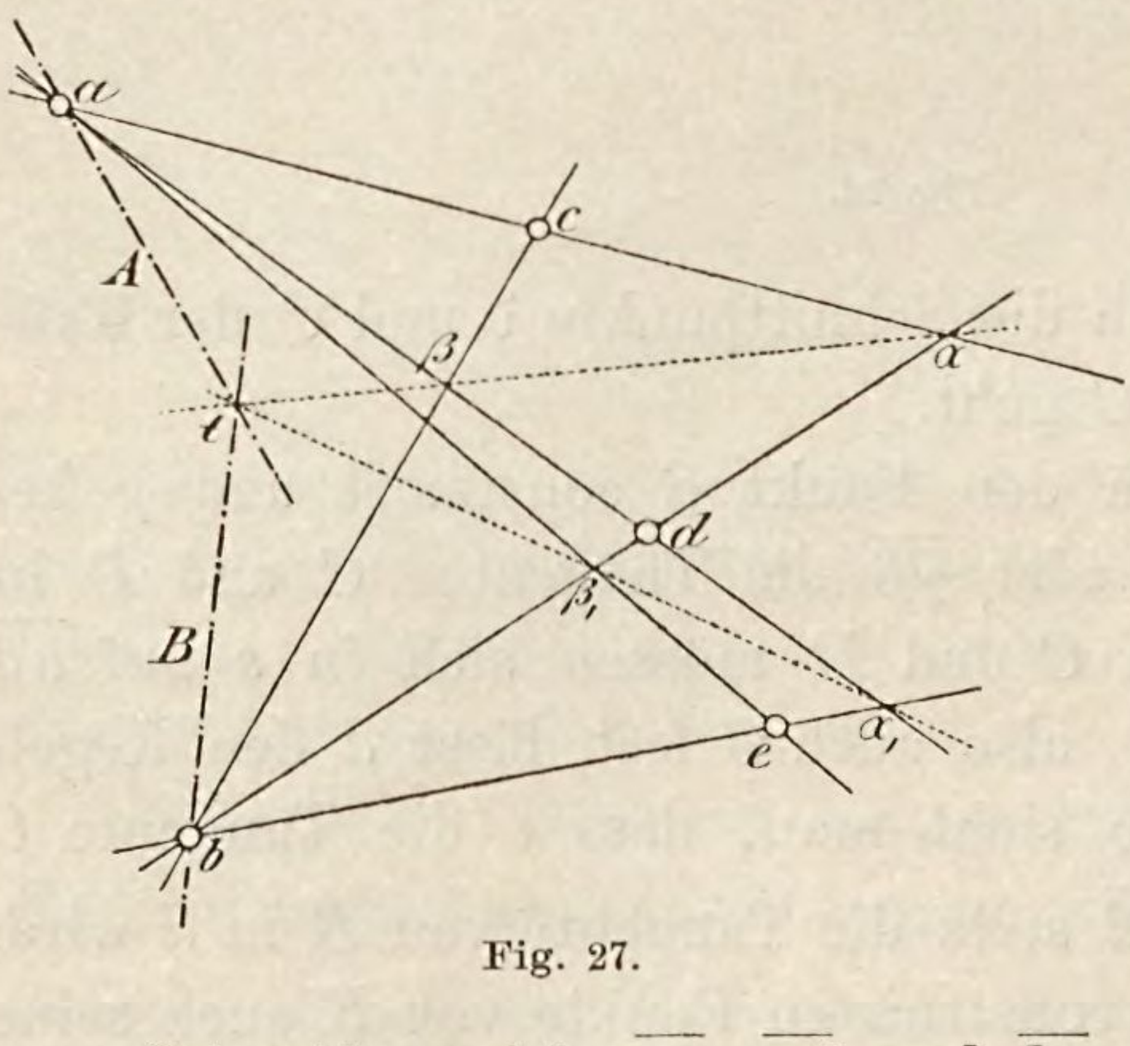


Fig. 27.

3. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist zu construiren, von dem gegeben sind fünf Punkte a, b, c, d, e.

Fig. 27. Schneiden sich $\overline{ac}$, $\overline{ad}$ und $\overline{bc}$, $\overline{bd}$ in α und β, sowie $\overline{ad}$, $\overline{ae}$ und $\overline{bd}$, $\overline{be}$ in α_1, β_1, so bestimmen $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\alpha_1\beta_1}$ den Punkt t, und $\overline{ta}$, $\overline{tb}$ sind die Tangenten des Kegelschnittes in a und b. Denn wird der Kegelschnitt construirt, welcher

$\overline{ta}$ und $\overline{tb}$ zu Tangenten hat und durch a, b, c geht, so zeigt die gemachte Construktion, dass er auch durch d und e geht, also der verlangte ist.

Von den gegebenen Punkten dürfen nicht drei in einer Geraden liegen, wenn ein eigentlicher Kegelschnitt bestimmt sein soll.

§ 3. Construktion des Kegelschnittes durch seine Tangenten.

Die Construktion der Tangenten des Kegelschnittes, wie sie im vorigen Paragraph gezeigt wurde, lehrt, dass wenn die Tangente C fest bleibt, während D sich ändert, die Strahlen $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{d}'}$ und $\overline{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}}$ sich in den Punkten γ der Geraden $\overline{ab}$ schneiden, Fig. 28.

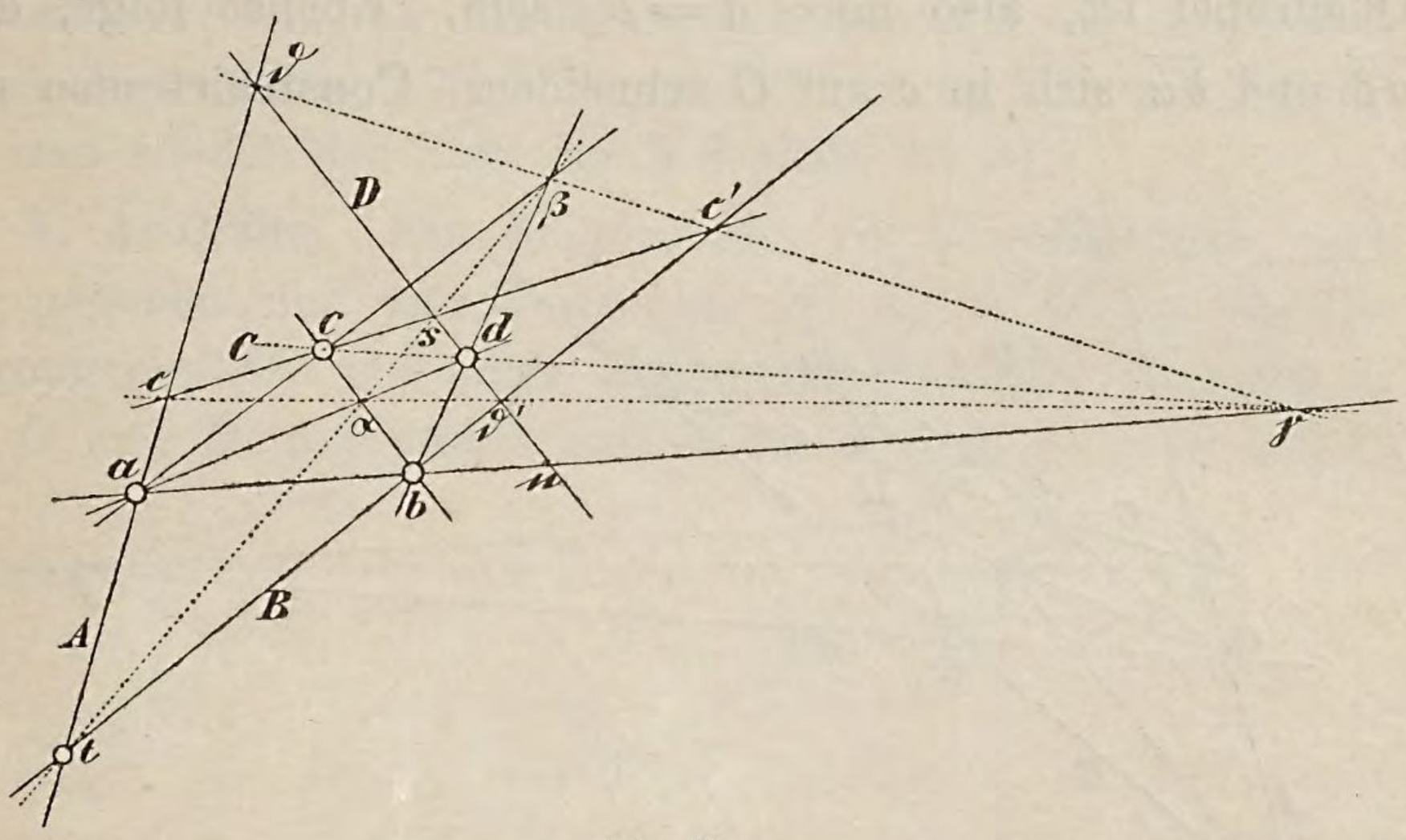


Fig. 28.

dass daher sowohl die Büschel $(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}')$, als die geraden Gebilde, in welchen sie B und A schneiden, einander projektivisch sind. Da die geraden Gebilde auf B und A dieselben sind, welche von den Tangenten D des Kegelschnittes auf ihnen ausgeschnitten werden, so ergiebt sich der

Lehrsatz 1. *Die Tangenten des Kegelschnittes schneiden zwei feste Tangenten desselben in projektivischen Punktreihen.*

Die Figur 28 macht die Construktion der Tangenten eines Kegelschnittes ersichtlich, von dem gegeben sind drei Tangenten A, B, C und die Berührungspunkte a, b auf zweien derselben. Schneidet C die A, B in $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ und werden

die Punkte γ von $\overline{ab}$ aus $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ auf B und A projicirt nach $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{d}$, so hüllt $\overline{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'} = D$ den Kegelschnitt ein. Denn ist s der Schnittpunkt der construirten Tangente D mit C und schneidet $\overline{ts}$ (t der Schnittpunkt von A und B) die Gerade $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{d}'}$ in α und $\overline{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}}$ in β, so ist $[\gamma\mathfrak{d}'\alpha\mathfrak{c}]$ sowie $[\gamma\mathfrak{c}'\beta\mathfrak{d}]$ je ein harmonisches Quadrupel. Schneidet nun $\overline{a\beta}$ die C in c und $b\beta$ die D in d, so gehen auch $a\alpha$ durch d und $b\alpha$ durch c. Denn ist $\mathfrak{n}$ der Schnittpunkt von D mit $\overline{ab}$, so folgt, wenn man das Quadrupel $[\gamma\mathfrak{c}'\beta\mathfrak{d}]$ aus b auf D projicirt, dass $[\mathfrak{n}\mathfrak{d}'d\mathfrak{d}]$ ein harmonisches Quadrupel wird, und wenn $\overline{a\alpha}$ die D in d_1 schnitte, so würde durch die Projektion von $[\gamma\mathfrak{d}'\alpha\mathfrak{c}]$ aus a auf D folgen, dass auch $[\mathfrak{n}\mathfrak{d}'d_1\mathfrak{d}]$ ein harmonisches Quadrupel ist, also muss $d = d_1$ sein. Ebenso folgt, dass $\overline{a\beta}$ und $\overline{b\alpha}$ sich in c auf C schneiden. Construirt man nun

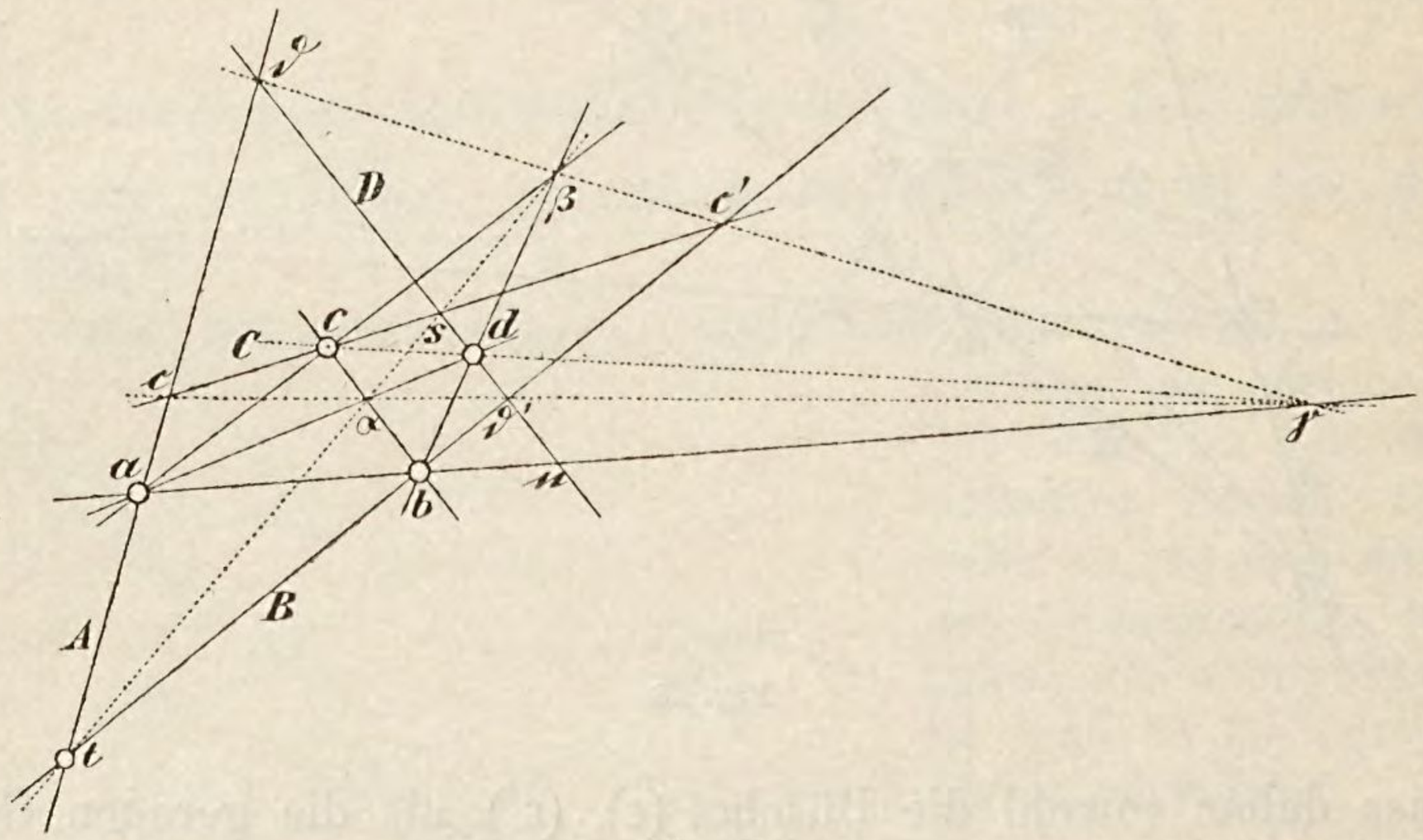


Fig. 28.

den Kegelschnitt, der durch a, b, c geht und A, B zu Tangenten hat, so geht er durch d und berührt C und D, also hüllt die Gerade D den Kegelschnitt ein.

Beachtet man, dass $\overline{cd}$ durch γ geht, so folgt:

Beschreiben $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ die projektivischen Punktreihen auf A und B, daher γ die Gerade $\overline{ab}$, so hüllt $\overline{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'} = D$ einen Kegelschnitt ein. Ist c der Berührungspunkt der festen Tangente $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}'} = C$, wobei $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{d}'}$ und $\overline{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}}$ durch γ gehen, so liefert

die Projektion von γ aus c auf die variable Tangente D den Berührungspunkt auf dieser.

Die Construktion ist auch bestimmt ausführbar, wenn C die unendlich ferne Gerade der Ebene ist, und liefert dann eine bekannte Construktion der Parabel aus zwei Tangenten und ihren Berührungspunkten. Liegen a, b im Unendlichen, so erhält man eine bekannte Hyperbelconstruktion.

Nennt man die Verbindungsgerade der Berührungspunkte zweier Tangenten die *Berührungssehne* dieser Tangenten, so kann die obige Construktion in folgenden Satz zusammengefasst werden:

Sind A, B, C, D vier Tangenten eines Kegelschnittes, so gehen die sechs ihnen zugehörigen Berührungssehnen paarweise durch die drei Ecken des Diagonaldreiseites des vollständigen Vierseites $ABCD$, die Berührungspunkte bilden also ein Viereck, dessen Diagonaldreieck auch Diagonaldreiseit des Vierseites $ABCD$ ist, was wieder der Satz des § 2 Seite 43 ist.

1. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist zu construiren, von dem gegeben sind vier Tangenten A, B, C, D und der Berührungspunkt a auf einer derselben. Wird die Tangente A von C und D in $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ und B von C und D in $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{d}'$ Fig. 29.

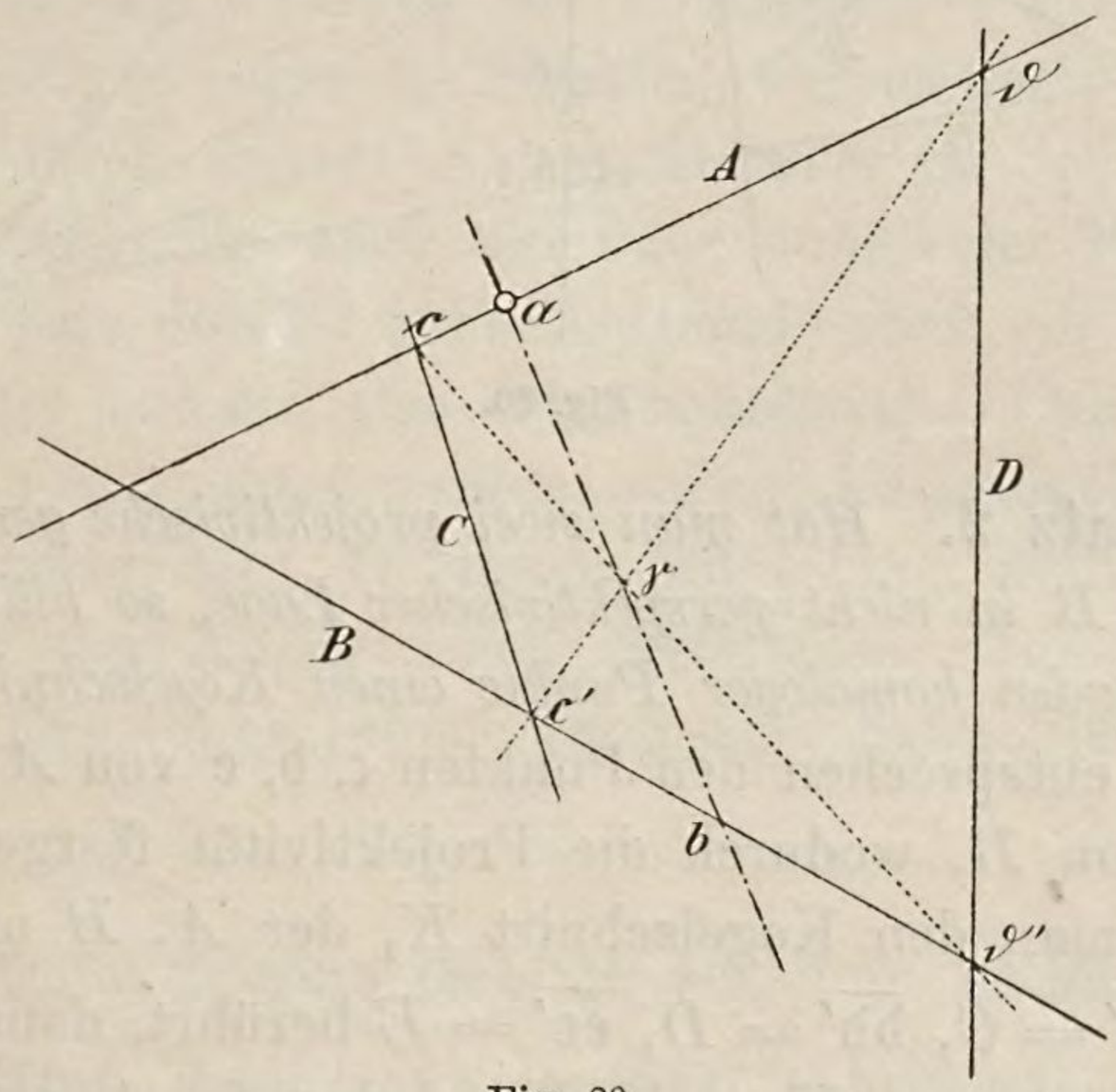


Fig. 29.

geschnitten, so treffen sich nach dem obigen Satze $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{d}'}$ und $\overline{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}}$ in γ und $\overline{\gamma a}$ ist die Berührungssehne von A und B, schneidet

daher B im Berührungspunkte b. Es folgt dann, dass, wenn der Kegelschnitt construirt wird, der A, B, C berührt, die ersteren in a und b, derselbe auch D berühren muss.

2. Aufgabe. Ein Kegelschnitt soll construirt werden, der fünf Gerade A, B, C, D, E berührt. Von den Geraden sollen keine drei durch einen Punkt gehen.

Fig. 30. Es möge die Gerade A von C, D, E in $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ und B von demselben Geraden C, D, E in $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$ geschnitten werden. Ist nun γ der Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{d}'}$ und $\overline{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}}$ und δ der Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{e}'}$ und $\overline{\mathfrak{c}'\mathfrak{e}}$, so möge die Gerade $\overline{\gamma\delta}$ in a und b die Geraden A, B schneiden. Dann wird der Kegelschnitt, welcher A, B, C berührt, erstere in a und b auch D und E berühren, also der verlangte sein.

Man sieht, dass durch die Angabe der Stücke in beiden Aufgaben der Kegelschnitt vollständig bestimmt ist.

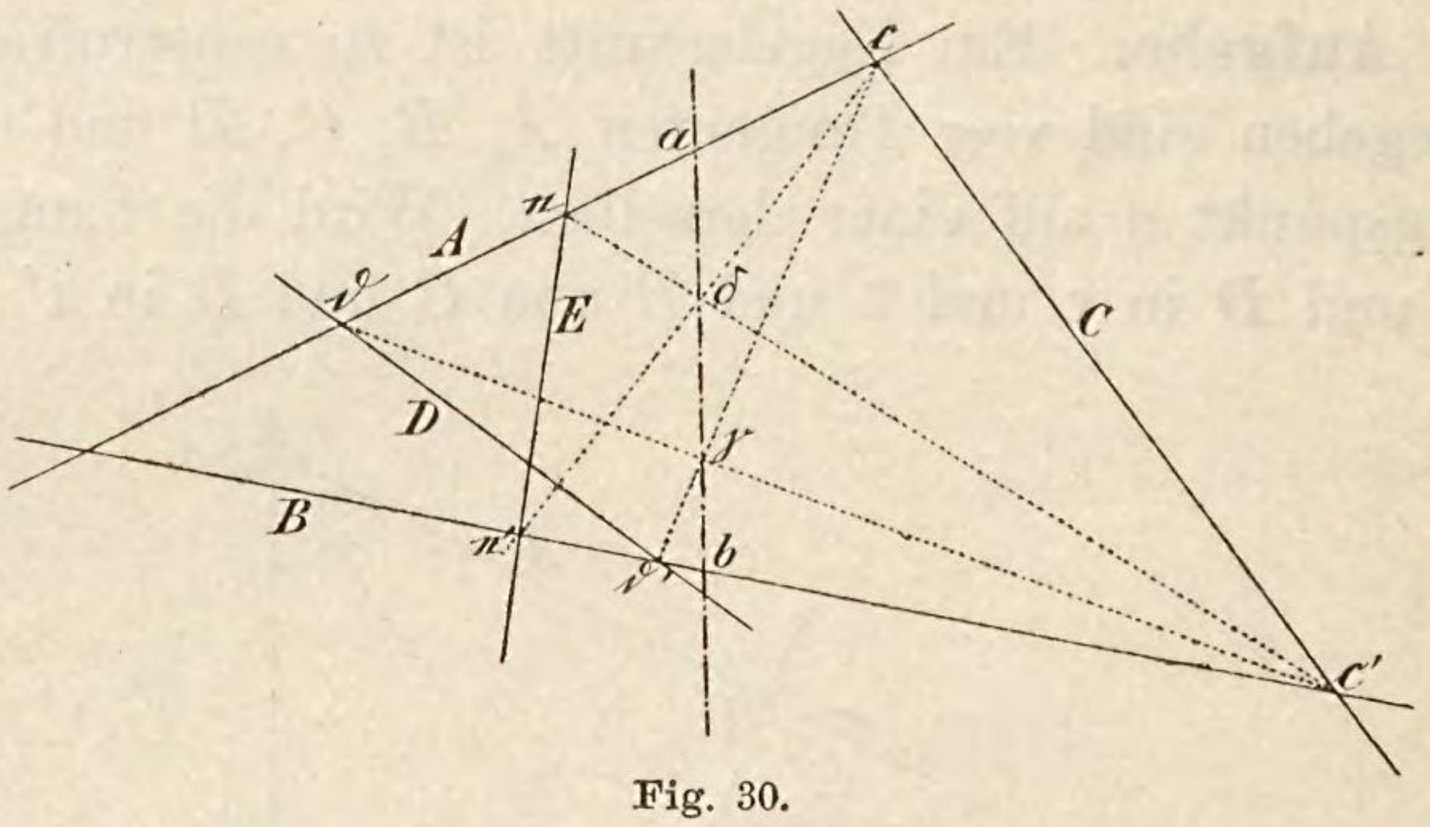


Fig. 30.

Lehrsatz 2. *Hat man zwei projektivische gerade Gebilde auf A und B in nicht perspektivischer Lage, so hüllen die Verbindungsgeraden homologer Punkte einen Kegelschnitt ein.*

Fig. 30. Denn entsprechen den Punkten $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ von A die Punkte $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$ von B, wodurch die Projektivität festgelegt ist, so construire man den Kegelschnitt K, der A, B und die drei Geraden $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}'} = C$, $\overline{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'} = D$, $\overline{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'} = E$ berührt, dann schneiden die Tangenten von K nach dem Lehrsatze 1 auf A und B eben diese projektivischen Punktreihen aus, die C, D, E in je einem Paar homologer Punkte treffen.

Wie ersichtlich entspricht dem Schnittpunkte t von A

und B auf A der Berührungspunkt a und auf B der Berührungspunkt b.

Projicirt man aus einem Punkte x der Ebene die einander projektivischen Punktreihen, welche die Tangenten von K auf irgend zwei seiner Tangenten A, B ausschneiden, so erhält man in x zwei conlocale projektivische Strahlenbüschel, die höchstens zwei Deckstrahlen haben. Sind dieselben vorhanden, G, H, so sind sie Tangenten von K und es folgt daher: *Durch einen Punkt x gehen höchstens zwei Tangenten von K.*

Ist x auf einer Tangente X von K gelegen, so geht notwendig noch eine Tangente Y durch x; denn die conlocalen projectivischen Büschel in x haben einen Deckstrahl X, also noch einen Y. Oder auch: Lässt man A mit X zusammenfallen, so entspricht dem Punkte x von X auf B der Punkt x' und $\overline{xx'}$ ist die zweite Tangente Y. Nur in dem Falle, wenn x der Berührungspunkt der Tangente X wäre, würde x' in den Schnittpunkt von X mit B fallen, also Y mit X zusammenfallen. Ist also x ein Punkt des Kegelschnittes K, so fallen die beiden Tangenten, die von ihm an K gehen, in eine zusammen.

Anmerkung. Liegen die Punktreihen auf A und B perspektivisch, so gehen die Strahlen, welche homologe Punkte verbinden, durch einen Punkt s. Da aber im Schnittpunkte t der beiden Geraden auch ein Paar homologer Punkte liegt, so enthält jede durch t gehende Gerade auch ein Paar homologer Punkte, es kann also das Punktepaar s, t als Enveloppe der Geraden betrachtet werden, welche homologe Punkte von A und B verbinden. In dieser Auffassung stellt irgend ein Punktepaar der Ebene einen zerfallenen Kegelschnitt dar, dieser als Enveloppe seiner Tangenten betrachtet.

§ 4. Projektivische Gebilde auf dem Kegelschnitte.

Definition. Legt man einen Strahlenbüschel (a) mit seinem Scheitel a auf einen Punkt des Kegelschnittes K, so schneiden die Strahlen von (a) auf K ein krummes Gebilde aus, bestehend aus der Gesammtheit der Punkte von K. *Wir wollen*

das krumme Gebilde dem Strahlenbüschel projektivisch nennen, wobei jedem Strahle von (a) der Punkt von K entspricht, in welchem er, ausser in a, den K noch schneidet. Demzufolge wird das krumme Gebilde auf K aus jedem beliebigem Punkte b des Kegelschnittes K durch einen zu ihm projektivischen Strahlenbüschel (b) projicirt. Denn es ist $(b) \barwedge (a)$, da sie dieselben Punkte von K projiciren.

Lehrsatz 1. *Die Tangenten der Punkte eines Kegelschnittes schneiden eine feste Tangente desselben in einem zum krummen Gebilde projektivischen geraden Gebilde.*

Fig 28. Durchläuft nämlich d den Kegelschnitt K, so beschreibt $\overline{ad}$ den Büschel (a), der zum krummen Gebilde auf K projektivisch ist. Also beschreibt auch α auf $\overline{bc}$ und daher auch $\mathfrak{d}'$ auf B je ein zum krummen Gebilde auf K projektivisches Gebilde, indem α der Schnitt von (a) und $\mathfrak{d}'$ die Projektion von α aus $\mathfrak{c}$ ist.

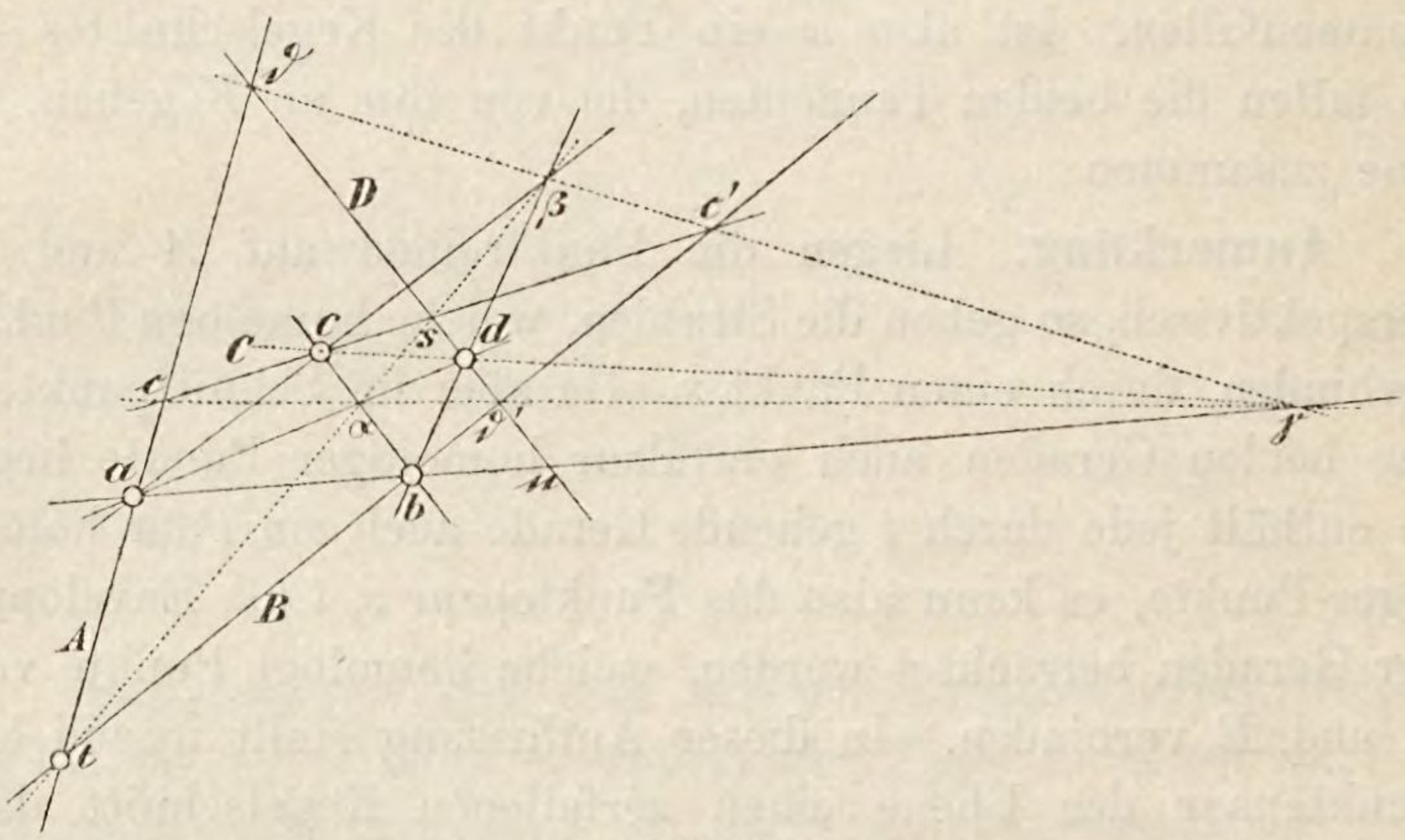


Fig. 28.

Lehrsatz 2. *Zwei krumme Gebilde auf demselben oder auf verschiedenen Kegelschnitten können stets so auf einander projektivisch bezogen werden, dass drei beliebig gewählten Punkten des einen drei beliebige des andern entsprechen.*

Denn die Büschel, welche die krummen Gebilde projiciren, können in der verlangten Weise projektivisch auf einander bezogen werden.

Es mögen die krummen Gebilde auf demselben Kegel- Fig. 31.
schnitte K liegen und den Punkten a, b, c sollen die Punkte a', b', c' entsprechen. Die Vervollständigung der Gebilde kann so geschehen: Man projicire das Gebilde a, b, c, x aus dem Punkte a' und das Gebilde a', b', c', x' aus a, dann wird

$$a'(abcx) \barwedge a(a'b'c'x')$$

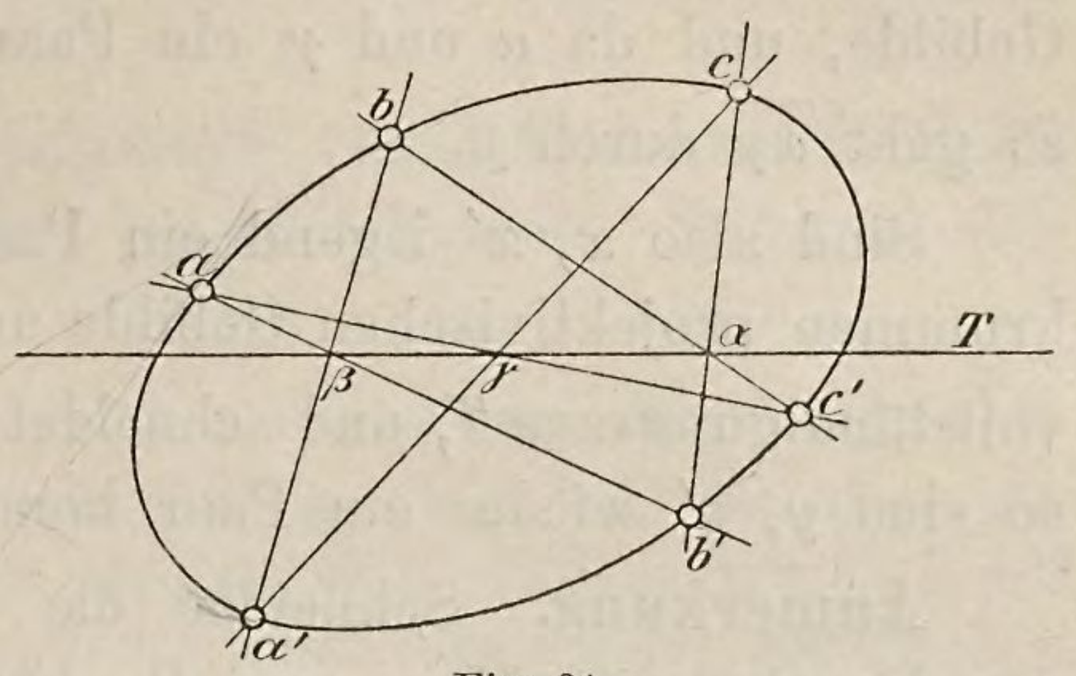


Fig. 31.

und da die Büschel im Strahle $\overline{aa'}$ entsprechende Strahlen haben, so schneiden einander die übrigen entsprechenden Strahlen in Punkten einer Geraden T. Sind also β, γ die Schnittpunkte von $\overline{ab'}$, $\overline{a'b}$ und $\overline{ac'}$, $\overline{a'c}$, so ist $\overline{\beta\gamma} = T$, und wenn $\overline{a'x}$ die T in ξ schneidet, so bestimmt $\overline{a\xi}$ auf K den Punkt x'. Wir nennen die Gerade T aus diesem Grunde die *Vervollständigungsaxe* der krummen projektivischen Gebilde. Von derselben gilt der folgende Satz:

Die Vervollständigungsaxe der projektivischen Gebilde ändert sich nicht, wenn an Stelle der ursprünglich gewählten Büschel (a) und (a') irgend zwei Büschel gewählt werden, deren Centren homologe Punkte der krummen Gebilde sind.

Es genügt zu zeigen, dass T sich nicht ändert, wenn Fig. 31.
man c' und c an Stelle von a' und a nimmt.

Schneiden sich die Geraden $\overline{cb'}$ und $\overline{c'b}$ in α, so hat man nur zu zeigen, dass $\overline{\alpha\gamma}$ durch β geht, indem $\overline{\alpha\gamma}$ die Vervollständigungsaxe für die Büschel

$$c'(abc\ldots) \barwedge c(a'b'c'\ldots)$$

wird. Es ist der Büschel

$$a(cc'b'a') \barwedge b(cc'b'a'),$$

da beide dieselben Punkte von K projiciren. Daher schneidet (a) die Gerade $\overline{a'c}$ in einem geraden Gebilde, welches zu dem geraden Gebilde auf $\overline{b'c}$, welches (b) ausschneidet, *perspektivisch* ist, indem im Punkte c sich die homologen Strahlen $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ schneiden. Nun enthält $\overline{ab'}$ sowie $\overline{ba'}$ je ein Paar

homologer Punkte der geraden Gebilde auf $\overline{a'c}$ und $\overline{b'c}$, also ist ihr Schnittpunkt β das Perspektivitätscentrum der geraden Gebilde, und da α und γ ein Paar homologer Punkte sind, so geht $\overline{\alpha\gamma}$ durch β.

Sind also x, x' irgend ein Paar homologer Punkte der krummen projektivischen Gebilde und ξ ein Punkt ihrer Vervollständigungsaxe T, und schneidet $x\xi$ den K in y', $x'\xi$ in y, so sind y, y' wieder ein Paar homologer Punkte.

Anmerkung. Schneidet die Vervollständigungsaxe T den Kegelschnitt K in zwei Punkten, so sind dieselben die Deckpunkte der projektivischen krummen Gebilde.

Aufgabe. Die Deckelemente zweier conlocaler projektivischer Gebilde sind zu construiren. Man kann durch Projektion die conlocalen Gebilde stets auf zwei conlocale projektivische Strahlenbüschel zurückführen. Legt man nun durch den Scheitel der Strahlenbüschel einen Kreis $\mathfrak{K}$, so erhält man auf diesem zwei krumme projektivische Gebilde, deren Vervollständigungsaxe nach Obigem construirt werden kann. Schneidet sie den Kreis in zwei Punkten, so sind die Strahlen des Büschels, die diese Punkte projiciren, Deckstrahlen der projektivischen Büschel, und ihnen entsprechen die Deckelemente der ursprünglich vorgelegten Gebilde.

Fig. 31.

Zusatz. Da a, b, c, a', b', c' sechs ganz beliebige Punkte des Kegelschnittes K sind, so ist in der Thatsache, dass die drei Punkte α, β, γ auf einer Geraden liegen, ein Satz über sechs Punkte eines Kegelschnittes enthalten, den wir unabhängig von der projektivischen Beziehung der krummen Gebilde aussprechen können. Wir nennen in dem Sechseck $a\,b'\,c\,a'\,b\,c'$ je zwei Seiten, die in dem einen und anderen Sinne (in dem das Sechseck von einer Ecke aus durchlaufen werden kann) um dieselbe Anzahl Ecken von einander

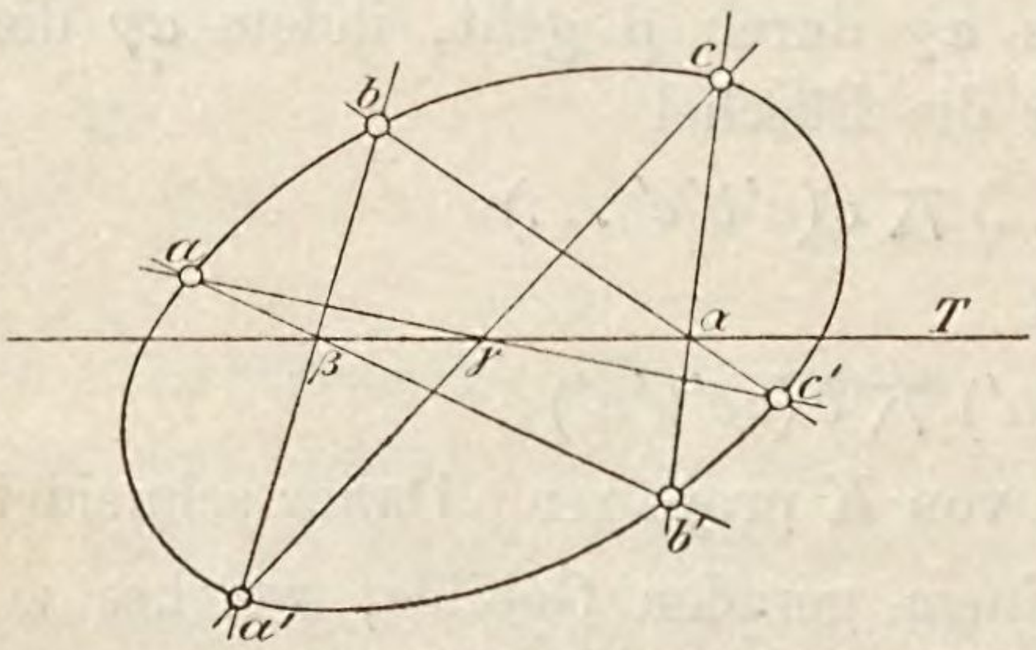


Fig. 31.

abstehen, *einander gegenüberliegende Seiten.* Diese sind: $\overline{ab'}$ und $\overline{a'b}$, $\overline{b'c}$ und $\overline{bc'}$, $\overline{ca'}$ und $\overline{c'a}$. Den obigen Satz können wir dann so aussprechen:

In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenem Sechsecke schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in drei Punkten einer Geraden.

Der Satz bleibt auch bestehen, wenn zwei der Punkte z. B. a und c' zusammenfallen, wenn nur an Stelle von $\overline{ac'}$ dann die Tangente des Kegelschnittes gesetzt wird. Fällt a mit c', b mit a' und c mit b' zusammen, so lautet dann dieser Satz: *Sind a, b, c drei Punkte des Kegelschnittes, so schneiden ihre Tangenten die gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes in drei Punkten einer Geraden.*

Der obige Satz ist nach seinem Entdecker *Pascal* (1623—1662) als *Pascal'scher Satz* bezeichnet worden. Man nennt jedes Sechseck, dessen drei Paare gegenüberliegender Seiten sich in den Punkten einer Geraden schneiden, ein Pascal'sches Sechseck und es gilt auch die Umkehr des obigen Satzes:

Jedes Pascal'sche Sechseck ist einem Kegelschnitte eingeschrieben.

Denn ist $abca'b'c$ Fig. 31 ein Pascal'sches Sechseck und man legt durch a, b, c, a', b' den Kegelschnitt K, so muss er auch durch c' gehen, denn K kann als Erzeugnis der projektivischen Büschel (a) und (b) betrachtet werden, welche die Geraden $\overline{a'c}$ und $\overline{b'c}$ in perspektivischen Punktreihen schneiden, deren Perspektivitätscentrum β ist, also sind $\overline{a\gamma}$ und $\overline{b\alpha}$ ein Paar homologer Strahlen, die sich in c' schneiden.

Dieser Satz kann dazu benützt werden, Punkte eines Kegelschnittes zu construiren, wenn fünf Punkte desselben gegeben sind.

§ 5. Die Involution auf dem Kegelschnitte.

Legt man eine Strahleninvolution mit ihrem Scheitel auf einen Punkt a des Kegelschnittes K, so schneiden ihre Strahlenpaare den K in Punktepaaren einer Involution, die aus jedem Punkte x des Kegelschnittes wieder durch eine Strahleninvolution projicirt wird. Hiebei bildet die Tangente X von K

in x mit dem Strahle, welcher x mit seinem homologen x' verbindet, ein Paar der Strahleninvolution in (x).

Fig. 32. Von einer Involution auf K können zwei Paare aa', bb' willkürlich gewählt werden, wodurch sie bestimmt ist. Projicirt man dann die Involution aus zwei Punkten a, a' von K, die ein Paar bilden, so müssen sich homologe Strahlen der Büschel

$$a\,(a'b'b\ldots) \barwedge a'\,(abb'\ldots)$$

in Punkten einer Geraden $\mathfrak{P}$, der Vervollständigungsaxe schneiden, die durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ geht, wenn $\overline{ab'}$, $\overline{a'b}$ sich in $\mathfrak{q}$ und $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$ in $\mathfrak{r}$ schneiden. Durchläuft b, b' die Involution, so beschreiben $\overline{ab}$ und $\overline{ab'}$ eine Strahleninvolution in (a) und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ eine Punktinvolution auf $\mathfrak{P}$. Dieselbe Punktinvolution wird auch von der Strahleninvolution in (a') ausgeschnitten. Die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ mit K sind die Deckpunkte der Involution auf K. Je nachdem also $\mathfrak{P}$ den K schneidet oder nicht schneidet, ist die Involution hyperbolisch oder elliptisch.

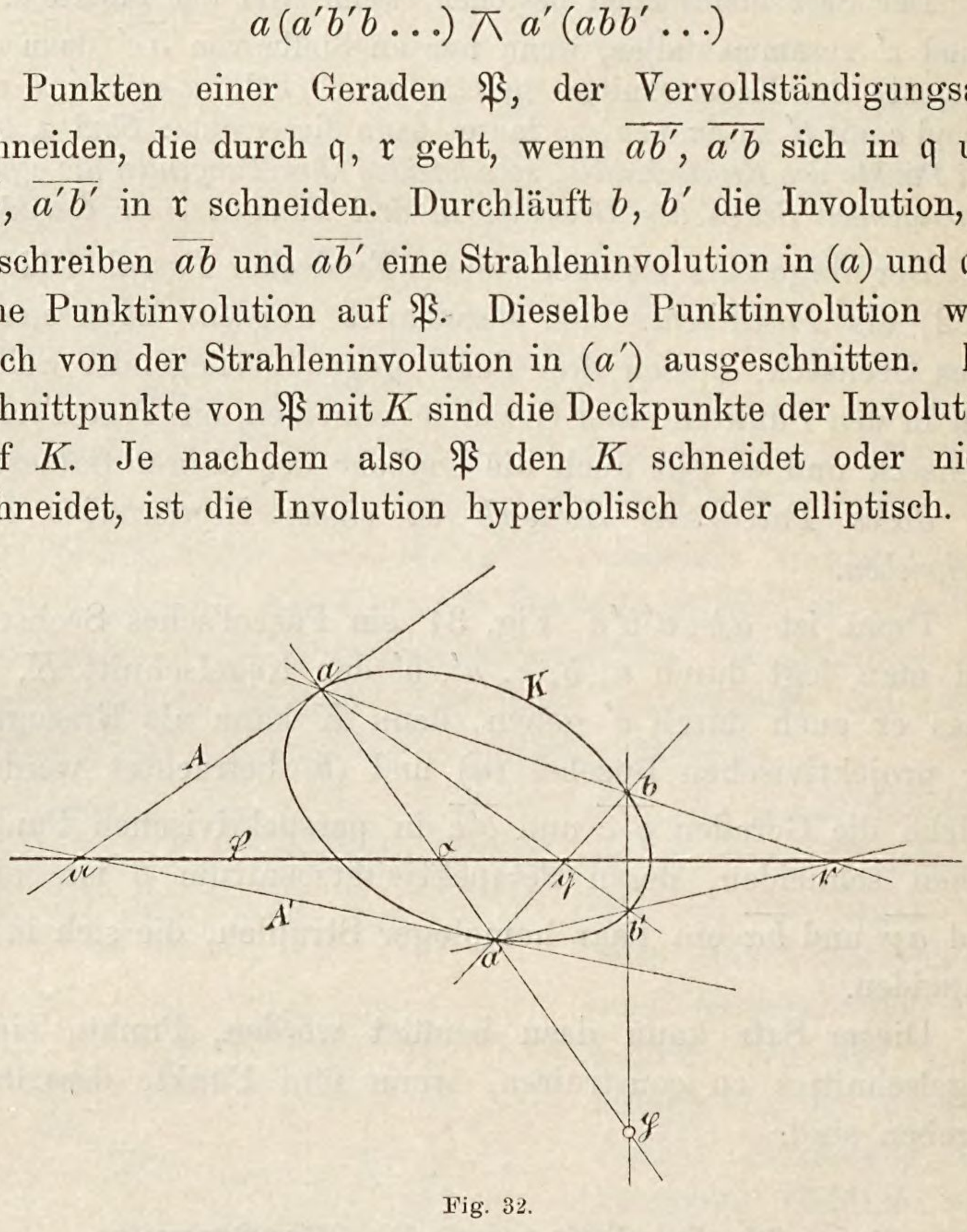


Fig. 32.

Da die Tangente A in a mit $\overline{aa'}$ ein Paar der Strahleninvolution in (a) bildet und ebenso $\overline{a'a}$ mit der Tangente A' in a' ein Paar der Involution in (a') ist, so müssen einander A und A' in einem Punkte $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{P}$ schneiden, der mit dem Schnittpunkte α von $\overline{aa'}$ mit $\mathfrak{P}$ ein Paar der In-

volution $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{P}$ bildet. Dasselbe gilt von den Tangenten irgend eines Punktepaares der Involution auf K. Wir wollen die Vervollständigungsaxe $\mathfrak{P}$ die *Polare der Involution* nennen und haben daher folgenden:

Lehrsatz 1. *Die Tangenten des Kegelschnittes in den Punktepaaren einer Involution auf demselben schneiden sich in Punkten der Polare der Involution.*

Lehrsatz 2. *Zu jeder Geraden $\mathfrak{P}$ der Ebene eines Kegelschnittes K gehört eine bestimmte Involution auf K, deren Polare sie ist.*

Es seien A, B irgend zwei Tangenten von K, die $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ schneiden, dann gehen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ noch je eine Tangente A' und B' an K. Sind dann a, b, a', b' die Berührungspunkte der Tangenten auf K, so hat die Involution, die durch die Paare aa', bb' bestimmt ist, $\mathfrak{P}$ zur Polare.

Nur in dem Falle, dass $\mathfrak{P}$ selbst Tangente von K wäre, würden die Tangenten A' und B' mit $\mathfrak{P}$ zusammenfallen und a', b' würden im Berührungspunkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ coïncidiren. Die Involution wäre dann keine eigentliche mehr, indem $a\mathfrak{p}$ und $b\mathfrak{p}$ ihre Paare sein sollten. Der Punkt $\mathfrak{p}$ bildet dann mit jedem Punkte des Kegelschnittes ein Paar dieser speciellen Involution. Wir wollen eine solche Involution eine *parabolische* nennen.

Lehrsatz 3. *Die Geraden $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, welche die Paare einer Involution auf dem Kegelschnitte K tragen, gehen durch einen festen Punkt $\mathfrak{p}$ der Ebene, den wir Pol der Involution nennen.*

Schneiden sich nämlich die Geraden $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ in $\mathfrak{p}$ Fig. 33.
und wird $\overline{aa'}$ von $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ in α geschnitten, so ist $[a\alpha a'\mathfrak{p}]$ ein harmonisches Quadrupel und $\mathfrak{p}$ bleibt daher fest, wenn bb' die Involution durchläuft, da $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ stets auf $\mathfrak{P}$ liegt. Schneidet $\overline{bb'}$ die Polare $\mathfrak{P}$ in β, so ist auch $[\mathfrak{p}\,b'\beta\,b]$ ein harmonisches Quadrupel und es folgt der

Satz: *Die Paare bb' der Involution auf K werden auf den Strahlen $\overline{bb'\mathfrak{p}}$ durch den Pol $\mathfrak{p}$ und die Polare $\mathfrak{P}$ harmonisch getrennt.*

Lehrsatz 4. *Jedem Punkte* $\mathfrak{p}$ *der Ebene des Kegelschnittes K entspricht auf K eine Involution, deren Pol er ist.*

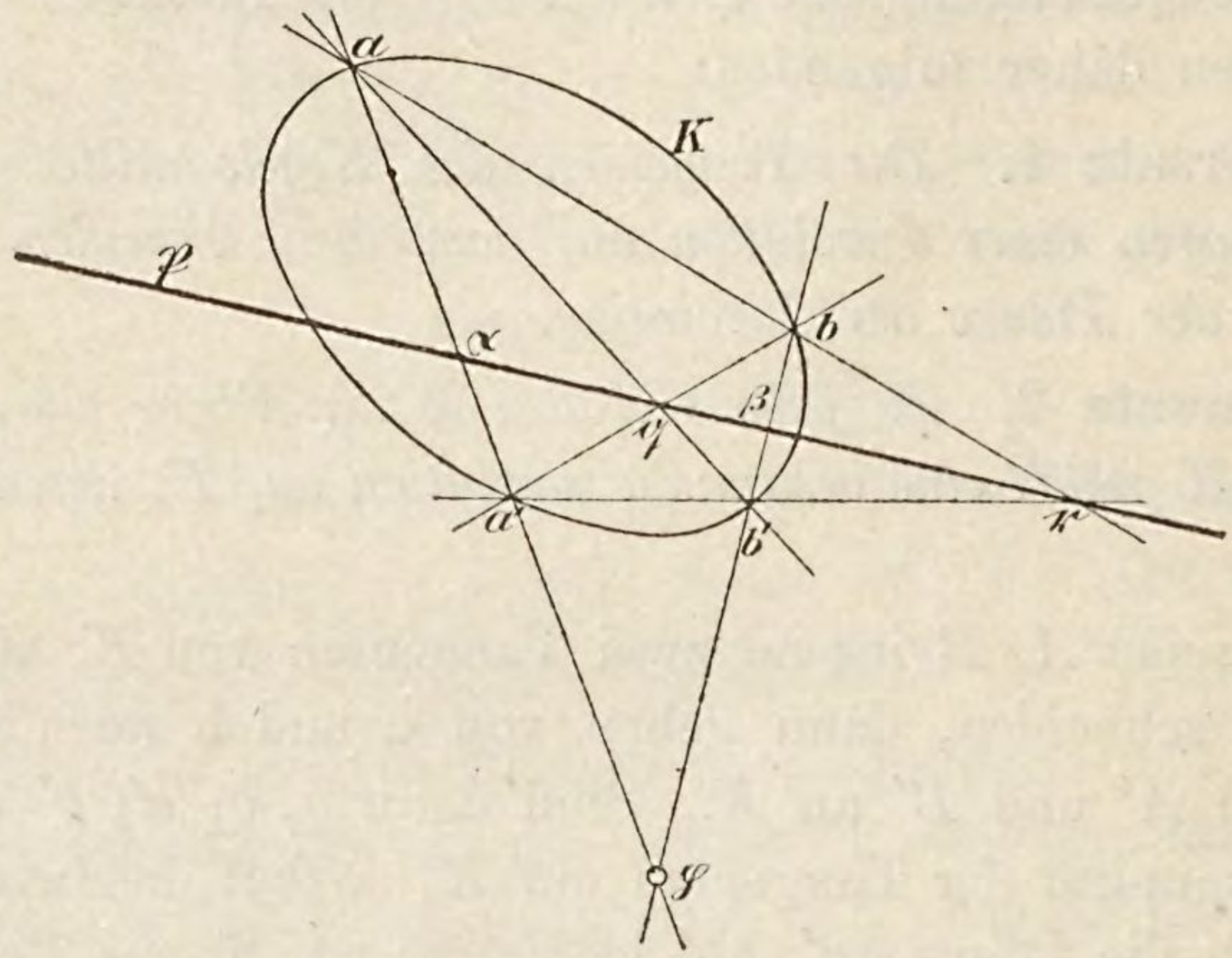


Fig. 33.

Verbindet man nämlich $\mathfrak{p}$ mit den Punkten a, b des Kegelschnittes, so schneiden diese Geraden K noch in a' und b' und die Involution, welche aa', bb' zu Paaren hat, hat $\mathfrak{p}$ zum Pol.

Nur in dem Falle, dafs p selbst ein Punkt von K ist, fallen a' und b' in $\mathfrak{p}$ zurück und die Involution wird parabolisch. Wir haben daher:

Den Tangenten und Punkten des Kegelschnittes K entsprechen parabolische Involutionen auf K, deren Polaren resp. Pole sie sind

Aufgabe. Eine Involution ist durch zwei ihrer Paare gegeben, man construire beliebige Paare, speciell ihre Deckelemente. Die Involution sei im Strahlenbüschel (a) angenommen. Der Kreis $\mathfrak{K}$, welchen man durch a legt, schneidet sie in einer krummen Involution, deren Pol $\mathfrak{p}$ und Polare $\mathfrak{P}$ seien. Jeder Strahl durch $\mathfrak{p}$ schneidet dann $\mathfrak{K}$ in einem Paare der Involution und die Polare $\mathfrak{P}$ schneidet $\mathfrak{K}$ in den Deckpunkten der Involution, die also auch die Deckstrahlen in (a) bestimmen.

Zusatz. *Sind von einer Strahleninvolution* (t) *zwei Strahlenpaare* AA', BB' *auf einander senkrecht, so stehen je zwei Strahlen* CC', *die ein Paar derselben sind, auf einander senkrecht.* Denn legt man durch den Scheitel t des Büschels einen Kreis $\mathfrak{K}$, welcher die Strahlen in aa', bb' schneiden möge,

so ist der Schnittpunkt von $\overline{aa'}$ mit $\overline{bb'}$ oder der Pol der Involution auf K der Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{R}$, denn ata' und btb' sind rechte Winkel. Also muss $\overline{cc'}$ auch durch $\mathfrak{m}$ gehen, daher C senkrecht auf C' stehen. Eine solche Involution heisst *circular*.

Es seien die Punkte g, h die Schnittpunkte der Polare $\mathfrak{P}$ mit K, also die Deckpunkte der Involution, deren Polare $\mathfrak{P}$ und Pol $\mathfrak{p}$ ist, die die Paare aa', bb' hat. Betrachten wir nun die Involution, deren Pol $\mathfrak{q}$ ist, die also durch die Paare ab', $a'b$ bestimmt ist, so ist deren Polare offenbar die Gerade $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ und g, h sind ein Paar dieser Involution, also schneiden sich die Tangenten G, H von K in g und h in einem Punkte der Geraden $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$. Da aber gh auch ein Paar der Involution ist, deren Pol $\mathfrak{r}$ ist, die die Paare ab und $a'b'$ bestimmen, also $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ zur Polare besitzt, so schneiden sich G, H auch in einem Punkte von $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ d. h. G, H schneiden einander in $\mathfrak{p}$. Daher der Fig. 34.

Satz: *Die Tangenten in den Deckpunkten einer Involution auf K schneiden einander in dem Pole der Involution.*

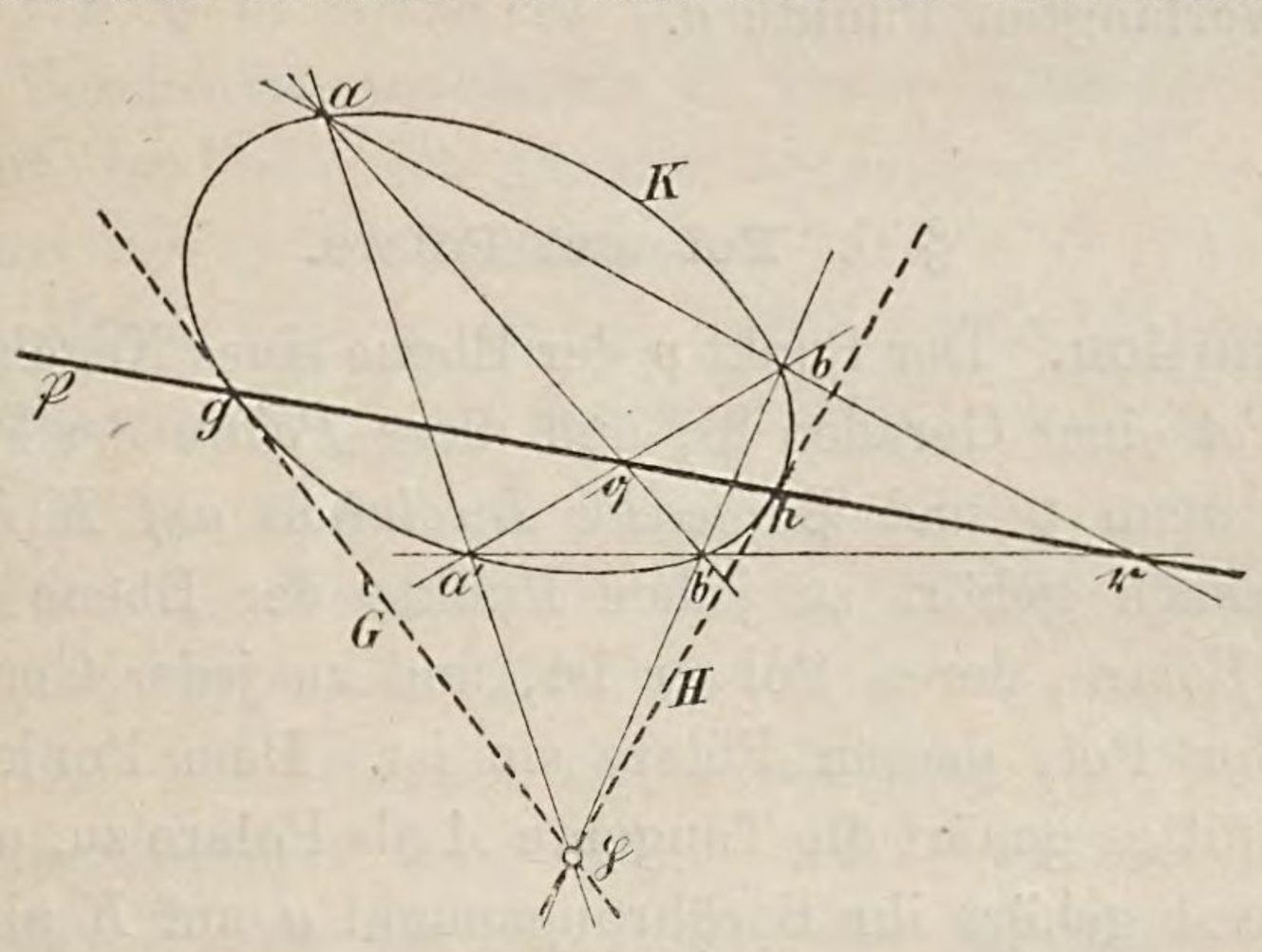


Fig. 34.

Gehört mithin dem Punkte $\mathfrak{p}$ der Ebene des Kegelschnittes K eine hyperbolische Involution auf K zu, so gehen von $\mathfrak{p}$ an den Kegelschnitt zwei Tangenten, welche K in den Deckpunkten g, h der Involution berühren. Die Polare $\mathfrak{P}$ der Involution schneidet K in g und h. Wir wollen sagen ein solcher Punkt $\mathfrak{p}$ *liegt ausserhalb des Kegelschnittes K.*

Demgemäss heissen die Punkte $\mathfrak{p}$, denen eine elliptische Involution auf K entspricht, *innerhalb des Kegelschnittes gelegen.* Die Polare $\mathfrak{P}$, welche zu einer solchen elliptischen Involution auf K zugehört, kann den Kegelschnitt nicht schneiden.

Zusatz. Hat die Involution auf K Fig. 34 zwei Deckpunkte g, h, so wird jedes Paar bb' derselben aus irgend einem Punkte x von K durch zwei Strahlen projicirt, welche von $\overline{xg}$ und $\overline{xh}$ harmonisch getrennt werden (Definition Seite 20). Wir wollen $[bgb'h]$ als harmonisches Quadrupel auf dem Kegelschnitte bezeichnen, und können daher sagen: *Jedes Paar einer hyperbolischen Involution auf K bildet mit den Deckpunkten ein harmonisches Quadrupel.*

Aufgabe. Man hat auf dem Kegelschnitte K die Punkte a, b gegeben; es soll der Punkt d bestimmt werden, welcher einen beliebig angenommenen Punkt c von K harmonisch von a, b trennt. Man construire in a und b die Tangenten von K, welche sich in $\mathfrak{p}$ schneiden mögen, dann trifft $\overline{\mathfrak{p}c}$ den K in dem verlangten Punkte d.

§ 6. Pol und Polare.

Definition. Der Punkt $\mathfrak{p}$ der Ebene eines Kegelschnittes K soll *Pol* einer Geraden $\mathfrak{P}$, und diese *Polare* des Punktes $\mathfrak{p}$ heissen, wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ *dieselbe Involution auf K induciren.*

Hiernach gehört zu jedem Punkte der Ebene eine bestimmte Polare, deren Pol er ist, und zu jeder Geraden ein bestimmter Pol, dessen Polare sie ist. Dem Punkte a des Kegelschnittes gehört die Tangente A als Polare zu, und jeder Tangente A gehört ihr Berührungspunkt a auf K als Pol zu (§ 5, Lehrsatz 2 und 4).

Die Punkte der Geraden $\mathfrak{P}$ heissen zum Pol $\mathfrak{p}$ conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt K, und ebenso heissen die Geraden durch $\mathfrak{p}$ conjugirt zu $\mathfrak{P}$ in Bezug auf K.

Lehrsatz 1. *Ist der Punkt $\mathfrak{q}$ conjugirt zu $\mathfrak{p}$, so ist auch $\mathfrak{p}$ conjugirt zu $\mathfrak{q}$ in Bezug auf K.*

Fig. 35. Wir haben nur zu zeigen, dass die Polare $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{q}$ durch

$\mathfrak{p}$ geht. Dies folgt aus dem Anblick der Fig. 35, indem $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{r}} = \mathfrak{Q}$ offenbar die Polare von $\mathfrak{q}$ ist, also durch $\mathfrak{p}$ geht.

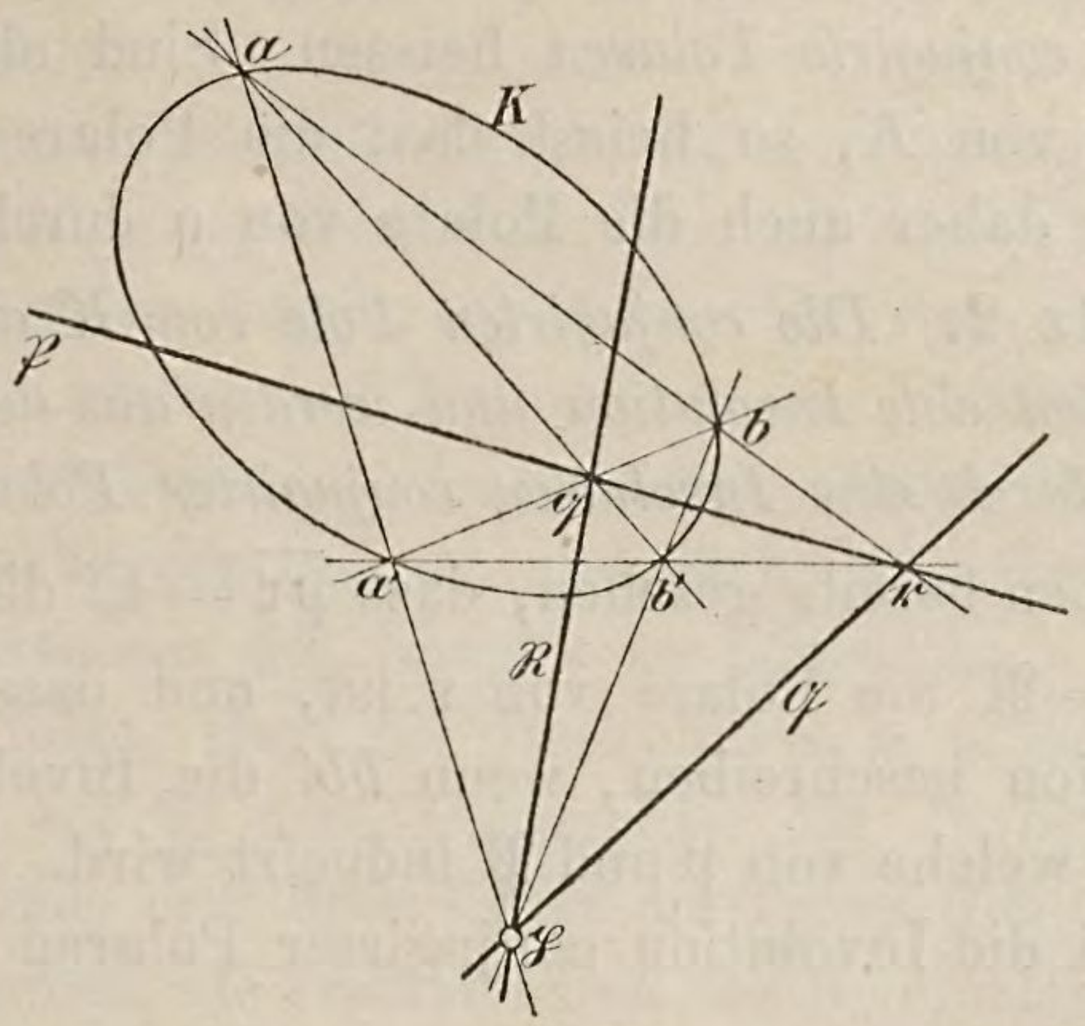


Fig. 35.

Folgerung 1. Durchläuft $\mathfrak{q}$ eine Gerade $\mathfrak{P}$, so beschreibt seine Polare $\mathfrak{Q}$ einen Strahlenbüschel $(\mathfrak{p})$, dessen Scheitel $\mathfrak{p}$ der Pol von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf K ist.

2. Beschreibt eine Gerade $\mathfrak{Q}$ den Strahlenbüschel $(\mathfrak{p})$, so durchläuft ihr Pol $\mathfrak{q}$ ein gerades Gebilde auf $\mathfrak{P}$, so dass $\mathfrak{P}$ die Polare von $\mathfrak{p}$ ist. Denn sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei Gerade durch $\mathfrak{p}$, deren Pole $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ sind, so werden die Polaren der Punkte von $\overline{\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2}$ den Büschel $(\mathfrak{p})$ beschreiben.

3. Ist die Gerade $\mathfrak{Q}$ conjugirt zu $\mathfrak{P}$, so ist auch $\mathfrak{P}$ conjugirt zu $\mathfrak{Q}$. Denn, da $\mathfrak{Q}$ durch den Pol $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ geht, so liegt der Pol $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{P}$.

4. Der Schnittpunkt zweier Geraden ist der Pol der Verbindungsgeraden ihrer Pole, und die Verbindungsgerade zweier Punkte ist die Polare des Schnittpunktes ihrer Polaren.

Die Polaren der Punkte einer Tangente A von K gehen durch den Berührungspunkt a derselben, und die Pole aller Geraden durch a liegen auf der Tangente A von a. Daher ist der Punkt a von K conjugirt zu jedem Punkte der Tangente A, also auch sich selbst, und die Tangente A ist conjugirt zu allen Strahlen durch a, also auch sich selbst.

Wir wollen zwei Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, die in Bezug auf K einander conjugirt sind, *conjugirte Pole* von K nennen. Ebenso sollen zwei Gerade $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, die in Bezug auf K einander conjugirt sind, *conjugirte Polaren* heissen. Sind also $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ conjugirte Pole von K, so heisst das: die Polare von $\mathfrak{p}$ geht durch $\mathfrak{q}$ und daher auch die Polare von $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{p}$.

Lehrsatz 2. *Die conjugirten Pole von K auf einer Geraden $\mathfrak{P}$ bilden eine Involution und werden aus dem Pole $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{P}$ durch eine Involution conjugirter Polaren projicirt.*

Fig. 35. Wir haben bereits gesehen, dass $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}} = \mathfrak{Q}$ die Polare von $\mathfrak{q}$, und $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}} = \mathfrak{R}$ die Polare von $\mathfrak{r}$ ist, und dass $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{P}$ eine Involution beschreiben, wenn bb' die Involution auf K durchlaufen, welche von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ inducirt wird. $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ durchlaufen hiebei die Involution conjugirter Polaren im Strahlenbüschel $(\mathfrak{p})$.

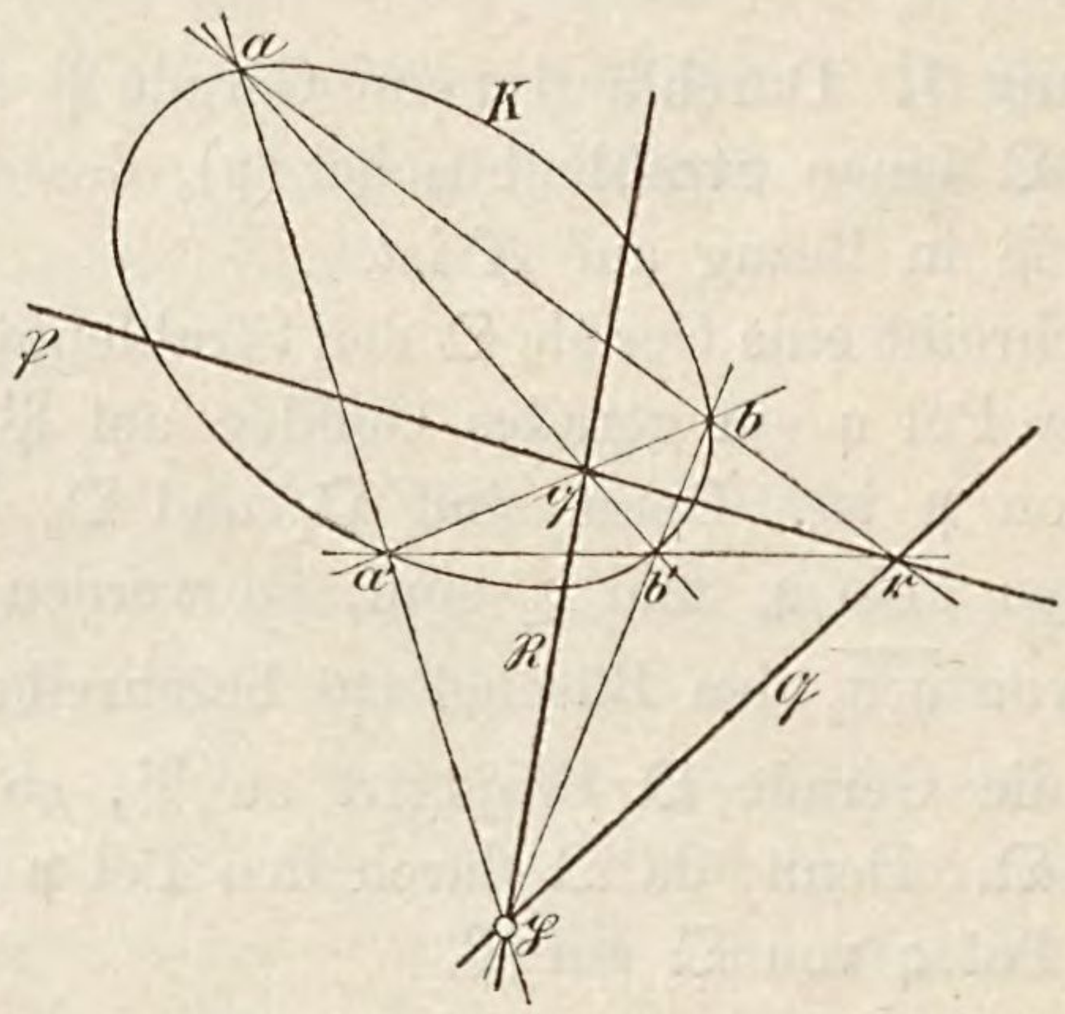


Fig. 35.

Folgerung 1. Projicirt man die durch $\mathfrak{P}$ inducirte Involution auf K aus einem beliebigen Punkte a von K auf die Gerade $\mathfrak{P}$, so erhält man auf derselben die Involution conjugirter Pole.

2. Projicirt man die Involution conjugirter Pole der Geraden $\mathfrak{P}$ aus einem beliebigen Punkte a des Kegelschnittes auf diesen, so erhält man auf K die Involution, welche $\mathfrak{P}$ auf demselben inducirt.

3. Projicirt man die Punkte eines Kegelschnittes aus zwei Punkten a, a' desselben, die mit $\mathfrak{p}$ auf einer Geraden liegen, so erhält man auf der Polare $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ die Involution conjugirter Pole.

4. Projicirt man die Involution conjugirter Pole auf $\mathfrak{P}$ aus zwei Punkten a, a' von K, die mit dem Pole $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ auf einer Geraden liegen, so schneiden sich entsprechende Strahlenpaare ausser auf $\mathfrak{P}$ noch in den Punkten von K.

Die Richtigkeit der Folgerungen ergibt sich aus dem blossen Anblicke der Fig. 35 und dürfte es daher überflüssig sein, jede derselben des Langen zu beweisen.

Aus **1.** folgt, dass die Deckpunkte g, h der Involution auf K auch auf $\mathfrak{P}$ die Deckpunkte der Involution conjugirter Pole sind, und dass daher die Tangenten G, H von K, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, die Deckstrahlen der Involution conjugirter Polaren von $\mathfrak{p}$ sind.

Da auf jeder Geraden $\mathfrak{P}$ der Ebene des Kegelschnittes K eine ganz bestimmte Involution conjugirter Pole auftritt, die nicht notwendig hyperbolisch zu sein braucht, so wollen wir folgende *Definition* einführen:

Die Deckpunkte der auf $\mathfrak{P}$ auftretenden Involution conjugirter Pole von K sind die Schnittpunkte von K mit $\mathfrak{P}$. Wir bezeichnen dieselben als ein Paar imaginärer Punkte, wenn die Involution elliptisch ist, und im Gegensatz hiezu als reelle, wenn die Involution hyperbolisch ist.

Indem hiemit die Deckpunkte der elliptischen Polinvolution als ein Paar imaginärer Punkte des Kegelschnittes definirt sind, können wir sagen: *Jede Gerade der Ebene schneidet den Kegelschnitt K in zwei Punkten, die entweder reell oder imaginär sind.* Die Tangenten A von K schneiden nur in einem, oder besser gesagt in zwei zusammenfallenden Punkten den Kegelschnitt K; die Involution conjugirter Pole auf A hat nämlich nur den Berührungspunkt a zum Deckpunkt, oder in a fallen zwei Deckpunkte der parabolischen Involution auf K zusammen.

In derselben Weise sollen die Deckstrahlen der Involution conjugirter Polaren eines Punktes $\mathfrak{p}$ *ein Paar imaginärer Tangenten* von K heissen, wenn die Involution elliptisch ist und

reelle, wenn sie hyperbolisch ist. Liegt a auf K, so ist die Involution parabolisch und beide Deckstrahlen fallen in die Tangente A.

Nach der Definition in § 5 Seite 58 liegen die Punkte, von denen *imaginäre Tangenten an K gehen*, *innerhalb K* und die, von denen *reelle Tangenten an K gehen*, *ausserhalb K*.

§ 7. Die Poldreiecke eines Kegelschnittes.

Fig. 36. Sind a, b, c, d vier Punkte eines Kegelschnittes K und $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ das Diagonaldreieck des vollständigen Viereckes $a\,b\,c\,d$, so ist

1) $\mathfrak{p}$ der Pol der Geraden $\overline{\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}} = \mathfrak{P}$ und beide induciren auf K die Involution, deren Paare $a\,b$, $d\,c$ sind;
2) $\mathfrak{q}$ der Pol der Geraden $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}} = \mathfrak{Q}$ und beide induciren auf K die Involution, deren Paare $a\,c$, $b\,d$ sind, und
3) $\mathfrak{r}$ der Pol der Geraden $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}} = \mathfrak{R}$ und beide induciren auf K die Involution, deren Paare $a\,d$, $b\,c$ sind.

Das Dreieck $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ hat also die Eigenschaft, dass jede Ecke Pol der gegenüberliegenden Seite in Bezug auf K ist.

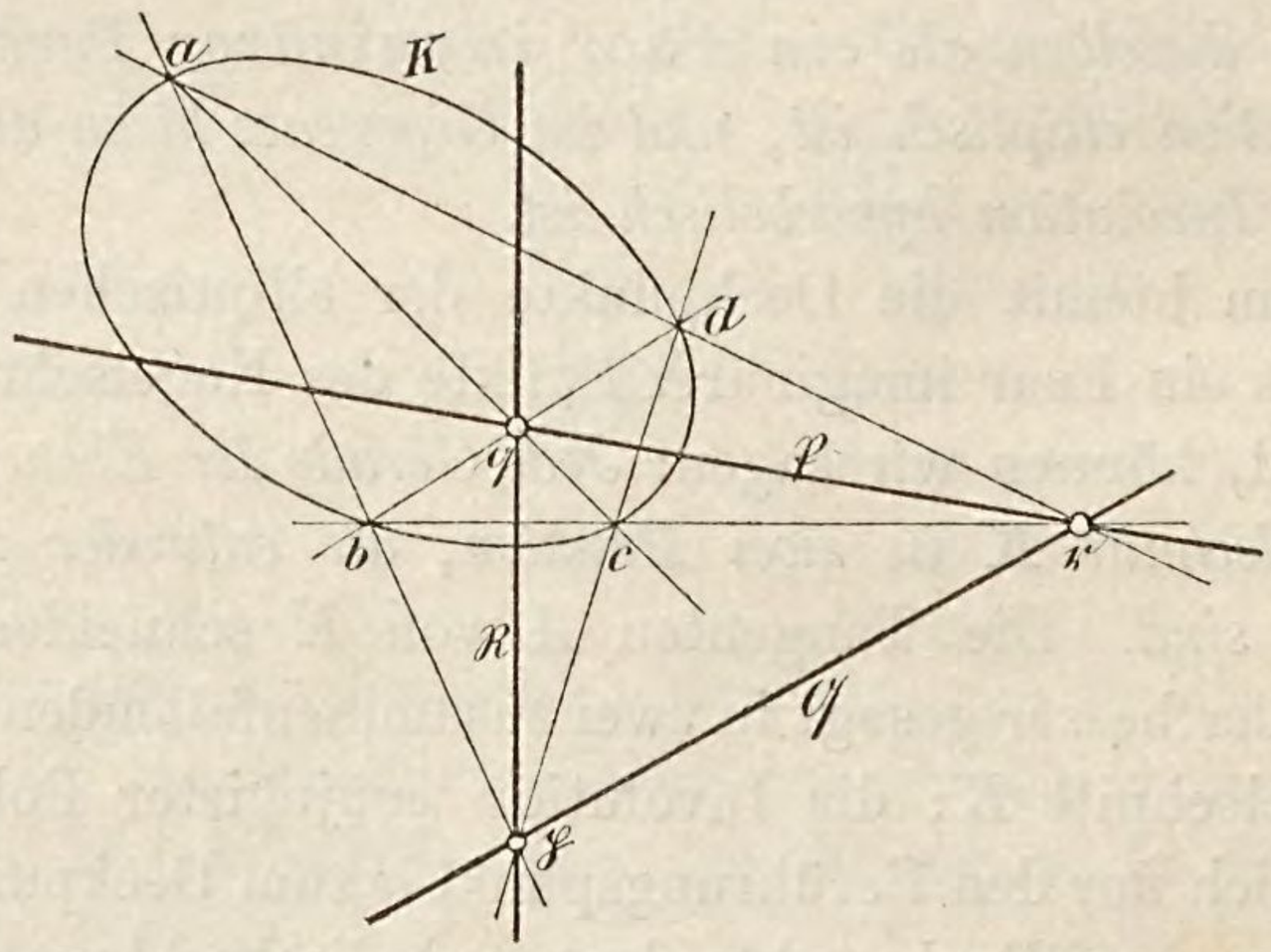


Fig. 36.

Drei Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, die ein solches Dreieck bilden, wollen wir ein *Tripel conjugirter Pole nennen*, *das Dreieck selbst soll Polardreieck oder Poldreieck von K heissen*.

Von einem Tripel conjugirter Pole kann man einen Punkt $\mathfrak{p}$ ganz willkürlich in der Ebene, einen zweiten $\mathfrak{q}$ auf der Polare $\mathfrak{P}$ des gewählten Punktes annehmen, wodurch das Tripel bestimmt ist, denn die Polare $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{q}$ schneidet dann $\mathfrak{P}$ in dem Punkte $\mathfrak{r}$, der Pol von $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ ist.

Lehrsatz 1. *Hat man ein Tripel conjugirter Pole* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ *von* K *und projicirt man dasselbe aus einem willkürlichen Punkte* a *von* K *auf den Kegelschnitt nach* b, c, d, *so gehen die Seiten des Dreieckes* $b\,c\,d$ *durch die Punkte* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ *und zwar jede Seite durch den Punkt, dessen Projektion die gegenüberliegende Ecke des Dreieckes lieferte.*

Denn da $\mathfrak{q}$ der Pol von $\mathfrak{Q}$ ist und $\mathfrak{p}, \mathfrak{r}$ ein Paar conju- Fig. 36.
girter Pole von K auf $\mathfrak{Q}$ sind, so liefert die Projektion b, d von $\mathfrak{p}, \mathfrak{r}$ auf K ein Paar der von $\mathfrak{Q}$, also auch $\mathfrak{q}$, inducirten Involution (Folgerung 2 zu Lehrsatz 2 des § 6), also geht $\overline{db}$ durch $\mathfrak{q}$, u. s. w.

Die Punkte a, b, c, d bilden daher ein Viereck, dessen Diagonaldreieck $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ ist.

Lehrsatz 2. *Ist* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ *ein Tripel conjugirter Pole von* K, *so liegt stets einer der Punkte innerhalb und zwei ausserhalb* K.

Die drei Pole $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ induciren auf K drei Involutionen, Fig. 36.
welche durch je zwei der sechs Paare bestimmt werden, die die vier Punkte a, b, c, d zu zwei und zwei zusammengefasst liefern. Von diesen Involutionen ist aber nach Kap. I. § 3. Lehrs. 6 Seite 19 notwendig *eine* elliptisch, ihr Pol liegt also innerhalb K, und *zwei* sind hyperbolisch, ihre Pole liegen ausserhalb K.

Liegt daher $\mathfrak{q}$ innerhalb K, so ist die Involution conjugirter Pole auf $\mathfrak{Q}$ elliptisch, und $\mathfrak{Q}$ schneidet also K in zwei imaginären Punkten. Hingegen schneiden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$, die Polaren von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$, den Kegelschnitt in je zwei reellen Punkten, da die Involutionen, welche $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ induciren, dann hyperbolisch sein müssen.

Folgerung 1. Liegt $\mathfrak{q}$ innerhalb K, so schneidet *jede* durch $\mathfrak{q}$ gehende Gerade $\mathfrak{R}$ den Kegelschnitt K in *zwei reellen* Punkten, denn ihr Pol $\mathfrak{r}$ liegt auf $\mathfrak{Q}$ und bildet mit dem

Schnittpunkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{Q}$ und mit $\mathfrak{q}$ ein Tripel conjugirter Pole, daher ist die Involution, welche $\mathfrak{r}$ inducirt, hyperbolisch.

2. Liegt $\mathfrak{q}$ innerhalb K, so liegen alle Punkte seiner Polaren $\mathfrak{Q}$ ausserhalb K.

3. Liegt $\mathfrak{p}$ ausserhalb K, und sind G, H die Tangenten von K, welche in den Schnittpunkten g, h der Polare $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ den Kegelschnitt K berühren, so schneiden die Geraden eines Winkelraumes $G \,.\, H$ den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten, die Geraden des Nebenraumes in zwei imaginären. Die Punkte von $\mathfrak{P}$, welche innerhalb des ersten Winkelraumes liegen, sind innerhalb K, die des letzteren ausserhalb K gelegen. Liegt nämlich $\mathfrak{R}$ innerhalb des ersten Winkelraumes, so liegt ihr Pol $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{P}$ ausserhalb K, also muss der Schnittpunkt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{P}$ innerhalb K liegen, da $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ ein Poldreieck ist. Dann schneidet aber $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}} = \mathfrak{Q}$ den Kegelschnitt nicht, und da G, H Deckstrahlen der Involution conjugirter Polaren sind, so trennen G, H die Geraden $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$ harmonisch, daher liegen letztere in verschiedenen Winkelräumen zwischen $G \,.\, H$.

4. Wird die Ebene E des Kegelschnittes K collinear auf eine Ebene E' abgebildet, so entspricht dem Kegelschnitte K ein Kegelschnitt K' in E'. Hiebei wird jedem Punkte $\mathfrak{p}$ von E, der $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ K liegt, ein Punkt $\mathfrak{p}'$ in E' entsprechen, der $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ K' liegt. Da nun jeder Kegelschnitt K so collinear abgebildet werden kann, dass K' ein Kreis wird, § 1 Lehrs. 2 Seite 38, so bildet jeder Kegelschnitt eine geschlossene Linie, welche die Punkte, die innerhalb des Kegelschnittes liegen, trennt von den Punkten die ausserhalb desselben liegen. Man kann daher auf stetigem Wege innerhalb der Ebene des Kegelschnittes K nicht von Innen nach Aussen gelangen, ohne K in einem Punkte zu überschreiten.

5. Zwei Involutionen auf demselben Träger haben stets ein Paar gemeinschaftlich, wenn wenigstens eine derselben elliptisch ist. Denn projicirt man sie auf einen Kegelschnitt K und sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die Pole der Involutionen, so muss einer,

etwa q, innerhalb liegen, dann schneidet aber $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}}$ den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten a, b, die ein Paar jeder der beiden Involutionen sind.

Sind beide Involutionen hyperbolisch und g, h die Deckpunkte der einen, g_1, h_1 die der anderen, so haben die Involutionen nur dann ein reelles Paar a, b gemeinschaftlich, wenn g, h von g_1, h_1 auf K nicht getrennt wird, denn a, b muss dann sowol g, h als g_1, h_1 harmonisch trennen, also müssen a, b die Deckpunkte der Involution sein, deren Paare g, h und g_1, h_1 sind.

Zusatz. In jeder Strahleninvolution (t) gibt es ein zu einander senkrechtes Strahlenpaar.

Denn legt man durch t einen Kreis $\mathfrak{K}$, welcher in seinen Mittelpunkt hat, so wird die auf ihm von der Strahleninvolution ausgeschnittene Punktinvolution ihren Pol in $\mathfrak{p}$ haben und $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{m}}$ schneidet daher $\mathfrak{K}$ in einem Punktepaare, das mit t verbunden, das einzige rechtwinklige Strahlenpaar liefert. Hätte die Involution in (t) zwei solche Paare, so müssten alle Paare zu einander senkrecht stehen. Sie ist dann eine circulare Involution. (Zusatz zum Lehrsatze 4 des § 5, Seite 56.)

6. In einer elliptischen Involution wird jedes Paar von einem anderen bestimmten harmonisch getrennt. Sei a, a' ein Paar der Involution auf K, deren Pol q innerhalb K liegt, ist $\mathfrak{r}$ der Pol von $\overline{aa'}$, so muss $\overline{\mathfrak{r}\,\mathfrak{q}}$ den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten b, b' schneiden, die ein Paar der Involution sind und a, a' harmonisch trennen.

Anmerkung. In einer hyperbolischen Involution existiren keine zwei Paare, die einander harmonisch trennen, denn die Paare einer solchen Involution dürfen einander überhaupt nicht trennen.

Lehrsatz 3. *Sind* $a\,\mathfrak{a}$, $b\,\mathfrak{b}$ *zwei Paare conjugirter Pole von* K, *so sind auch der Schnittpunkt* c *von* $\overline{ab}$ *mit* $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ *und* $\mathfrak{c}$, *der Schnittpunkt von* $\overline{a\,\mathfrak{b}}$ *mit* $\overline{b\,\mathfrak{a}}$, *ein Paar conjugirter Pole von* K. Fig. 37.

Durch zwei Paar conjugirter Pole ist mithin stets ein drittes bestimmt.

Es sei t Pol von $\overline{ab}$ in Bezug auf K, also $\overline{t\mathfrak{b}}$ die Polare von b und $\overline{t\mathfrak{a}}$ Polare von a. Dieselben mögen $\overline{ab}$ in β resp. α schneiden.

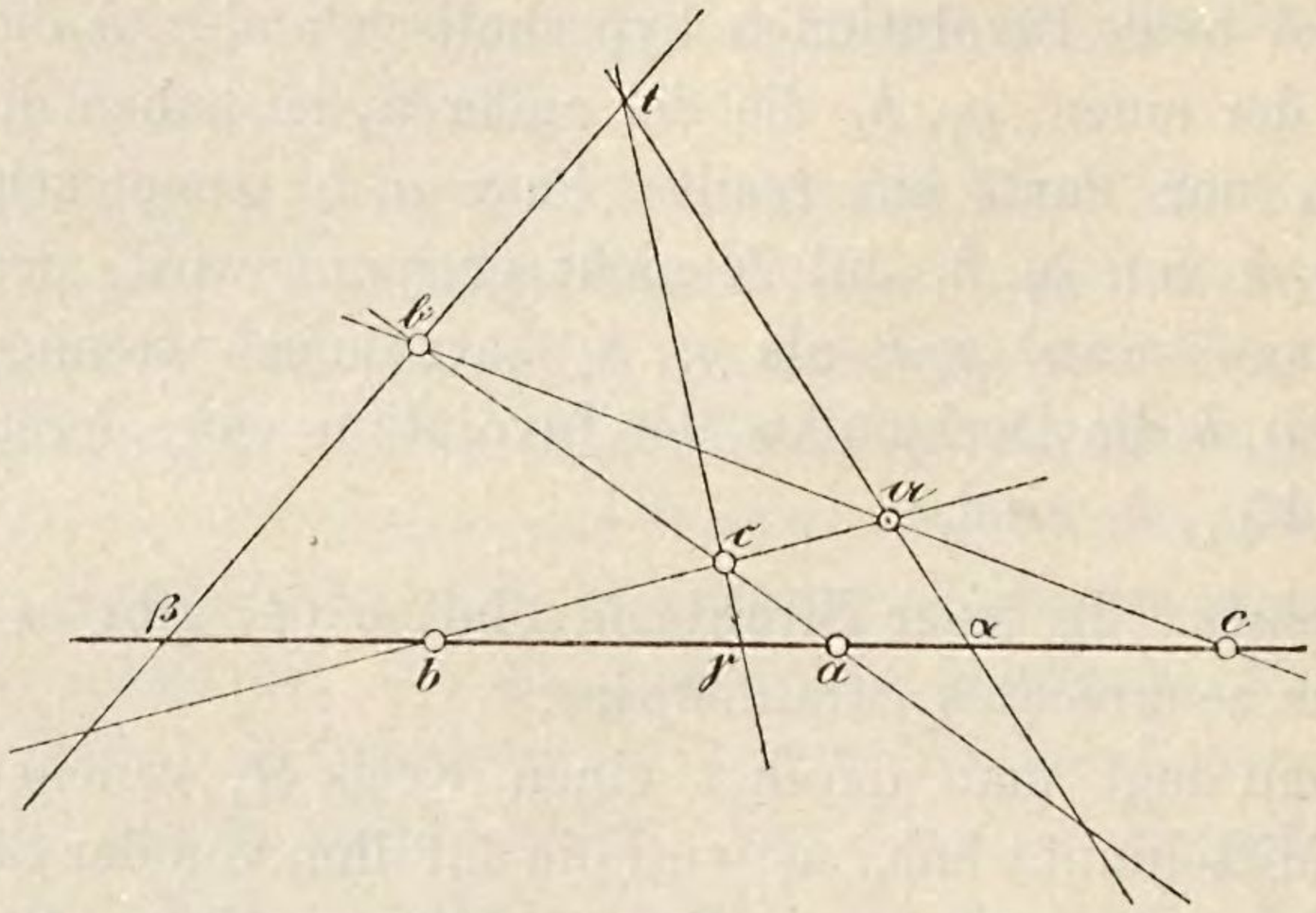


Fig. 37.

Dann sind $b\beta$ und $a\alpha$ zwei Paare der Involution conjugirter Pole von K auf $\overline{ab}$, wodurch diese bestimmt ist. Schneidet nun $\overline{t\mathfrak{c}}$ die $\overline{ab}$ in γ, so ist $c\gamma$ auch ein Paar dieser Involution (Kapitel I, § 3, Lehrsatz 3, Seite 16), also ist $\overline{t\gamma}$ Polare von c d. h. c und $\mathfrak{c}$ sind conjugirt in Bezug auf K.

IV. Kapitel.

Imaginäre Bestimmungsstücke des Kegelschnittes. — Adjungirte Involution. — Polarsystem. — Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte.

§ 1. Construktion des Kegelschnittes aus imaginären Bestimmungsstücken.

Die Fundamentalconstruktion des Kegelschnittes (III, § 2) zeigt, dass auf jeder durch t gehenden Geraden Γ die Involution conjugirter Pole bestimmt ist durch die zwei Paare $t\tau$ und $\alpha\beta$, und dass γ der Pol der Geraden Γ ist. Aber Fig. 38.

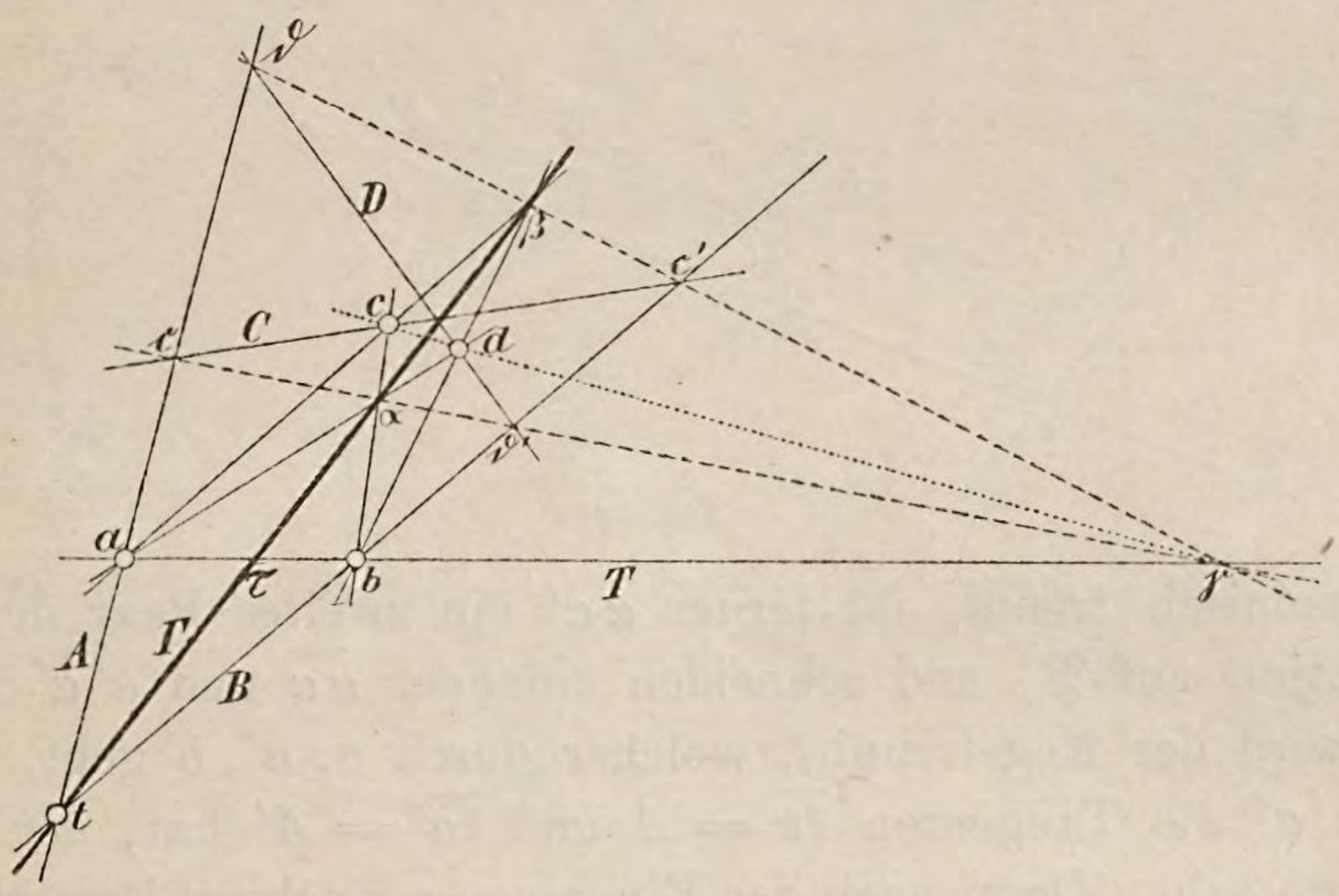


Fig. 38.

auch die Involution conjugirter Polaren in γ ist bestimmt durch die zwei Paare $\overline{\gamma t}$, $\overline{\gamma ab} = T$ und $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\gamma\beta}$. Die letzteren zwei Geraden projiciren die Schnittpunkte der Tangente C oder D auf A und B, wir haben daher den später zu benutzenden:

Lehrsatz 1. *Aus jedem Punkte γ der Geraden T, Polare des Schnittpunktes t der Tangenten A und B eines Kegelschnittes,*

werden die projektivischen Punktreihen auf A und B, welche die Tangenten des Kegelschnittes auf ihnen ausschneiden, durch eine und dieselbe Strahleninvolution projicirt, welche die Involution conjugirter Polaren des Punktes γ ist.

Wir gehen nun zur Construktion des Kegelschnittes über, wenn Involutionen conjugirter Pole oder Polaren desselben gegeben sind.

1. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist zu construiren, von dem gegeben ist der Pol $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{P}$, die Involution conjugirter Pole auf $\mathfrak{P}$ und ein Punkt a.

Fig. 39. Man ziehe $\overline{\mathfrak{p}\,a}$, welche Gerade $\mathfrak{P}$ in τ schneiden möge. Ist dann t der zu τ zugehörige Punkt der Involution auf $\mathfrak{P}$ und a' der Punkt, welcher a von $\mathfrak{p}$, τ auf der Geraden $\overline{\mathfrak{p}\,\tau\,a}$

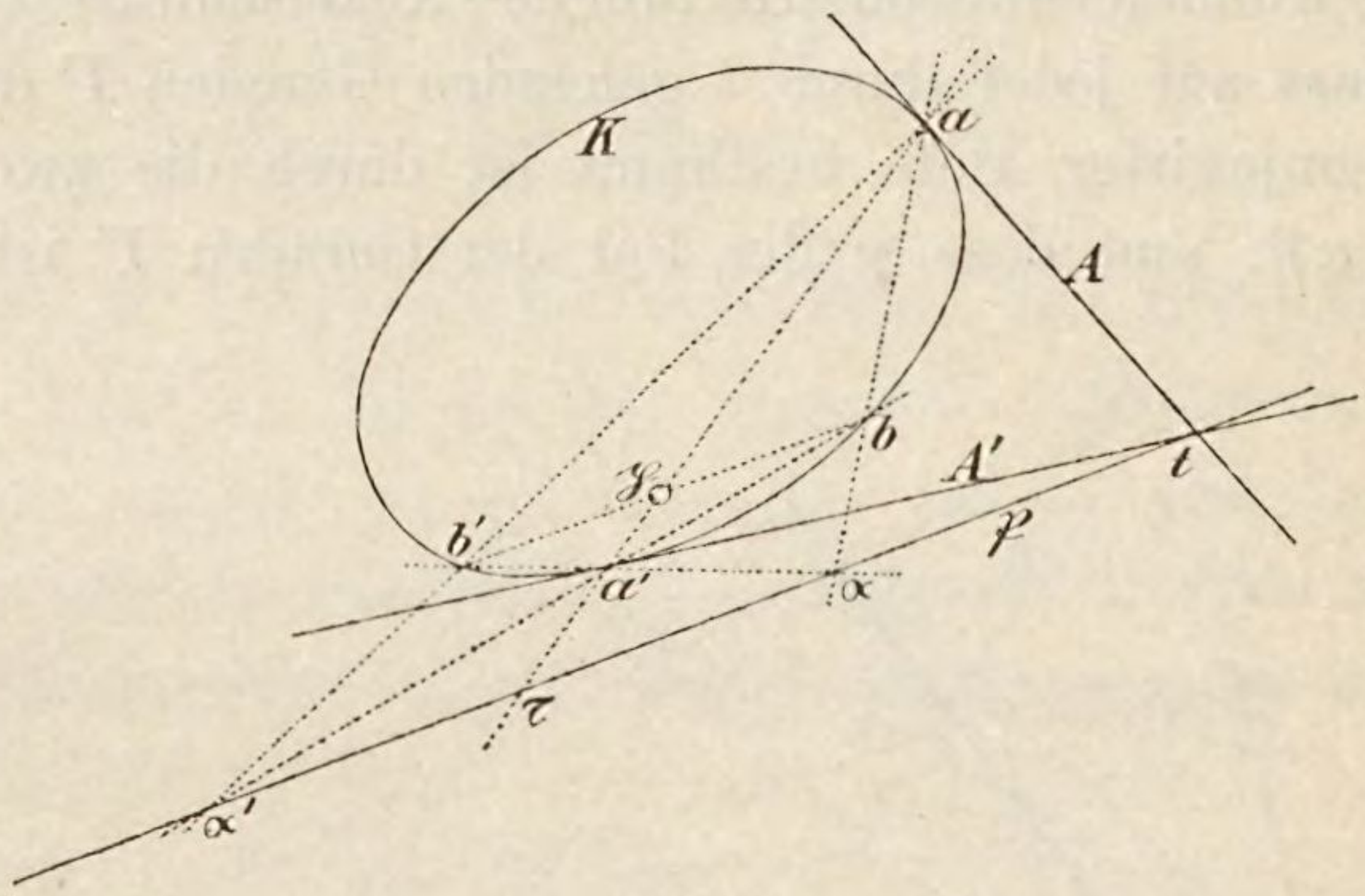


Fig. 39.

harmonisch trennt, ist ferner $\alpha\,\alpha'$ ein zweites Paar der Involution auf $\mathfrak{P}$, und schneiden einander $\overline{a\,\alpha}$ und $\overline{a'\,\alpha'}$ in b; so wird der Kegelschnitt, welcher durch a, a', b geht, in a und a' die Tangenten $\overline{ta} = A$ und $\overline{ta'} = A'$ hat, der verlangte sein. Denn nach der Eingangs gemachten Bemerkung hat K auf $\mathfrak{P}$ die Punkte t, τ und α, α' zu conjugirten Polen, also auch die gegebene Involution conjugirter Pole, und $\mathfrak{p}$ ist der Pol von $\mathfrak{P}$, da a, a' durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ harmonisch getrennt sind, und t der Pol von $\overline{a\,a'}$ ist. Aus der 4. Folgerung zu Lehrs. 2 des § 6, Kap. III, Seite 61 ergibt sich, dass wenn nun aus a und a' die Involution conjugirter Pole auf $\mathfrak{P}$ projicirt wird, man alle Punkte des Kegelschnittes erhält. So schneiden sich $\overline{a\,\alpha'}$ und $\overline{a\,\alpha}$ in b', einem Punkte von K.

Die obige Construktion ist ganz unabhängig davon, ob die Involutionen auf $\mathfrak{P}$ und in $(\mathfrak{p})$ hyperbolisch oder elliptisch sind. Sind sie hyperbolisch, so stellen sie ein Paar Punkte und ihre Tangenten des Kegelschnittes dar. Sind sie elliptisch, so wollen wir sagen: vom Kegelschnitte sind gegeben *ein Paar imaginärer Punkte und ihre* (*imaginären*) *Tangenten*, dann ist er noch durch einen (reellen) Punkt vollständig bestimmt.

2. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind gegeben die Involutionen conjugirter Pole auf zwei Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, sowie ein Punkt a; derselbe ist zu construiren. Wir setzen voraus, dass wenigstens eine der Involutionen elliptisch ist, und dass a weder auf $\mathfrak{P}$ noch auf $\mathfrak{Q}$ liege.

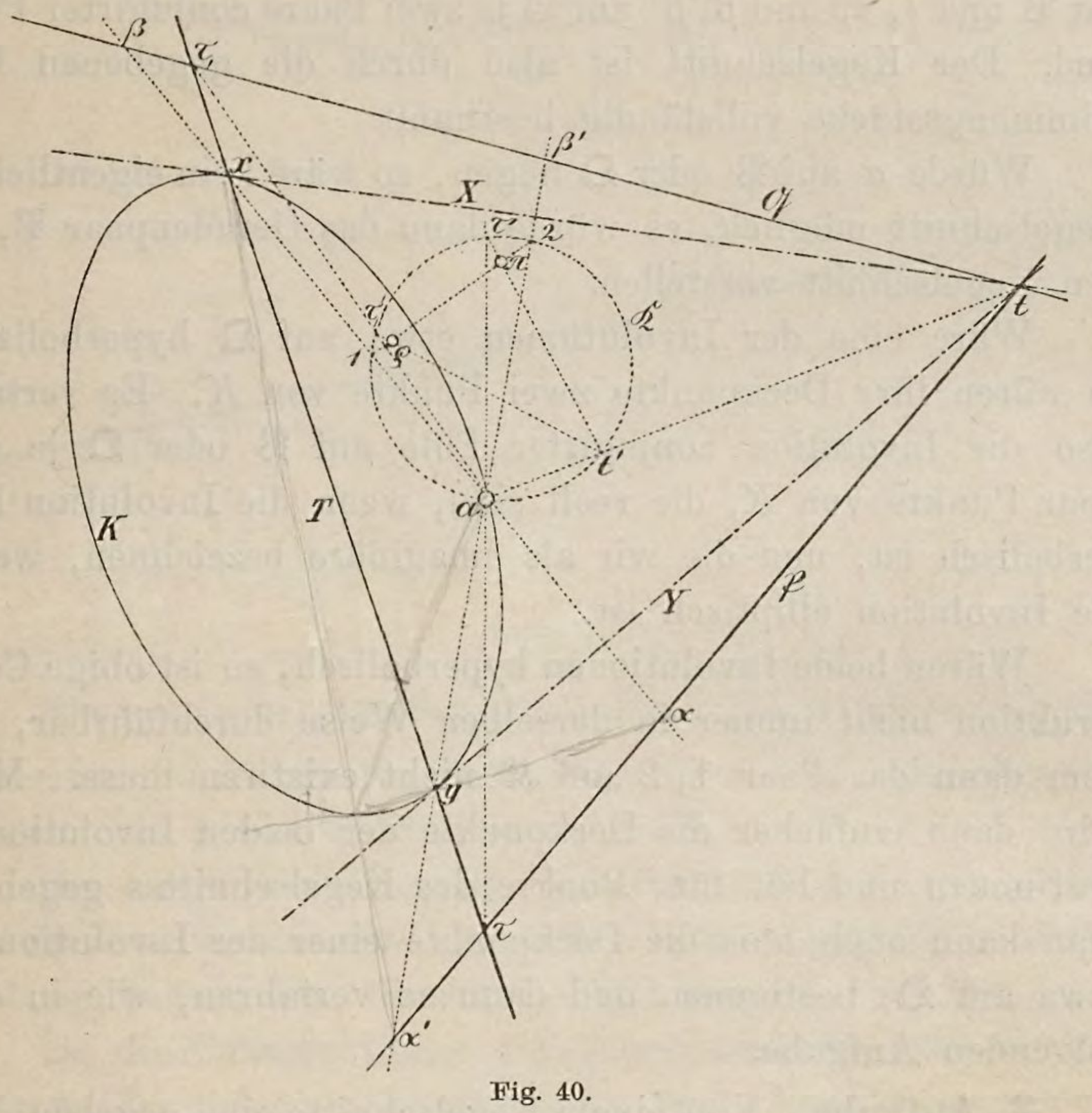


Fig. 40.

Man lege durch a irgend einen Kreis $\mathfrak{K}$ und projicire auf denselben die Involutionen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, so erhält man in π und ϱ die Pole dieser auf $\mathfrak{K}$ liegenden Involutionen. Ist nun τ und τ_1 der zum Schnittpunkte t von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ent- Fig. 40.

sprechende Punkt in der Involution auf $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{Q}$, so ist $\overline{\tau\tau_1} = T$ offenbar die Polare von t für den zu construirenden Kegelschnitt. Schneidet $\overline{\pi\varrho}$ den Kreis $\mathfrak{K}$ in 1, 2, so stellen diese Punkte das beiden auf $\mathfrak{K}$ liegenden Involutionen gemeinschaftliche Paar dar, das stets vorhanden ist, da eine der Involutionen elliptisch vorausgesetzt wird. Zieht man $a1$ und $a2$, welche T in x und y schneiden mögen, so schneiden diese Geraden auf $\mathfrak{P}$ ein Paar $\alpha\alpha'$ und auf $\mathfrak{Q}$ ein Paar $\beta\beta'$ der gegebenen Involutionen aus. Der Kegelschnitt K nun, welcher durch x, y, a geht und die Tangenten $\overline{tx} = X$ und $\overline{ty} = Y$ hat, ist der verlangte, denn er hat die gegebenen Involutionen conjugirter Pole auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, da t, τ und α, α' auf $\mathfrak{P}$ und t, τ_1 und β, β' auf $\mathfrak{Q}$ je zwei Paare conjugirter Pole sind. Der Kegelschnitt ist also durch die gegebenen Bestimmungsstücke vollständig bestimmt.

Würde a auf $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ liegen, so wäre kein eigentlicher Kegelschnitt möglich, es würde dann das Geradenpaar $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ den Kegelschnitt vorstellen.

Wäre eine der Involutionen etwa auf $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, so wären ihre Deckpunkte zwei Punkte von K. Es vertritt also die Involution conjugirter Pole auf $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ je ein Paar Punkte von K, die reell sind, wenn die Involution hyperbolisch ist, und die wir als imaginäre bezeichnen, wenn die Involution elliptisch ist.

Wären beide Involutionen hyperbolisch, so ist obige Construktion nicht immer in derselben Weise durchführbar, indem dann das Paar 1, 2 auf $\mathfrak{K}$ nicht existiren muss. Man wird dann einfacher die Deckpunkte der beiden Involutionen bestimmen und hat fünf Punkte des Kegelschnittes gegeben. Man kann auch blos die Deckpunkte einer der Involutionen, etwa auf $\mathfrak{Q}$, bestimmen und dann so verfahren, wie in der folgenden Aufgabe.

3. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind gegeben drei Punkte a, b, c und die Involution conjugirter Pole auf einer Geraden $\mathfrak{P}$; derselbe ist zu construiren.

Fig. 41. Man kann so wie in der 2ten Aufgabe verfahren, indem auf $\mathfrak{Q} = \overline{bc}$ die Involution gegeben ist, einfacher aber auch

folgendermassen. Man ziehe $\overline{ac}$ und $\overline{ab}$, welche $\mathfrak{P}$ in α und β schneiden mögen. Sind dann α' und β' die zu α, β zugehörigen Punkte der Involution auf $\mathfrak{P}$, so mögen sich $\overline{b\beta'}$ und $\overline{c\alpha'}$ in dem Punkte a' schneiden. Ist t der zum Schnittpunkte τ von $\overline{aa'}$ mit $\mathfrak{P}$ conjugirte Pol, so wird der Kegelschnitt, welcher durch a, a', b geht, die Tangenten $\overline{ta}$, $\overline{ta'}$ hat, auf $\mathfrak{P}$ die gegebene Involution conjugirter Pole besitzen und auch durch c gehen.

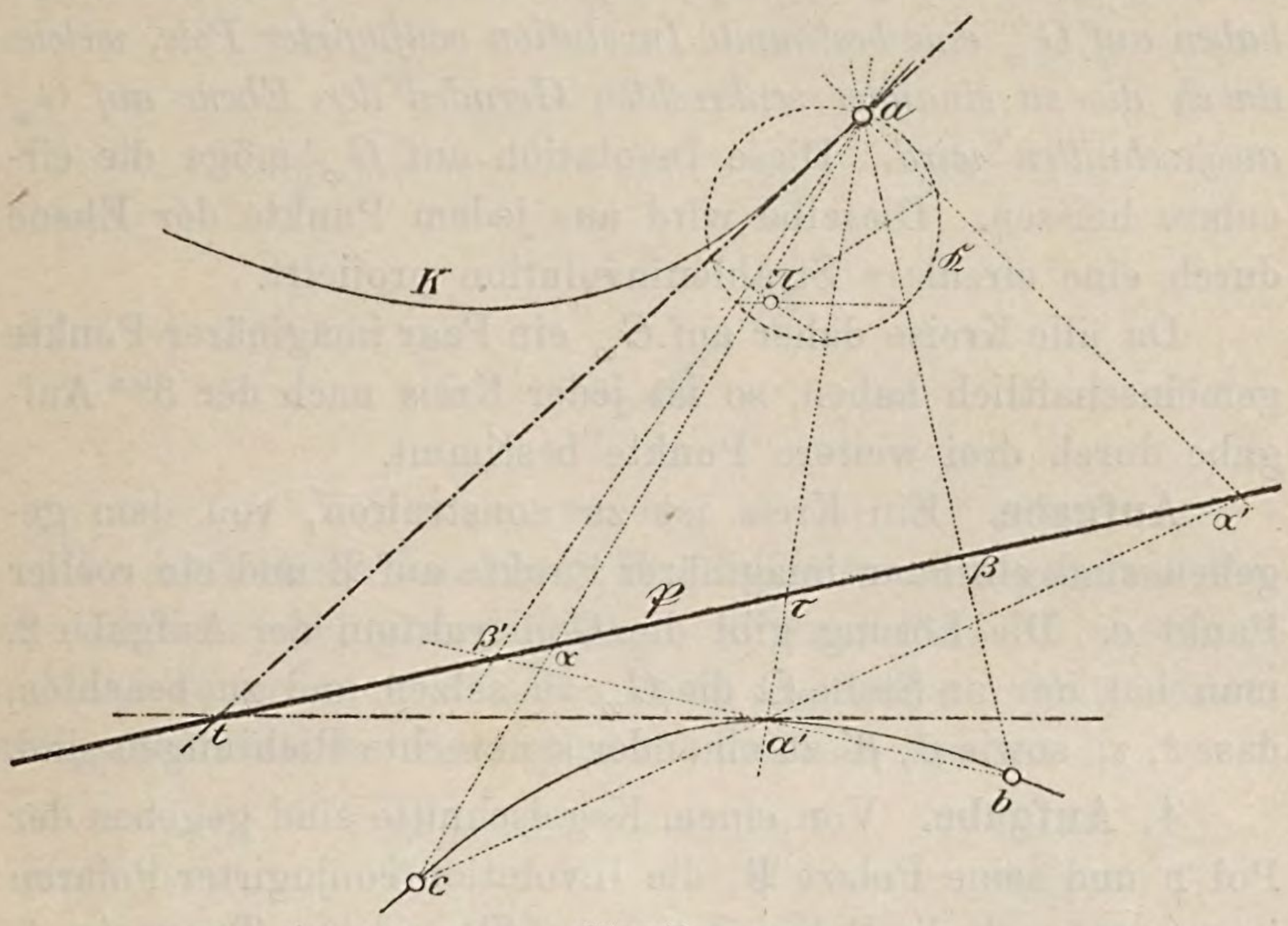


Fig. 41.

Ebenso liefert der Schnittpunkt c' der Geraden $\overline{a\alpha'}$ und $\overline{a'\alpha}$ einen Punkt des Kegelschnittes K, und $\overline{cc'}$ schneidet $\overline{aa'}$ in dem Pol $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf K.

Die Aufgabe verlangt die Construktion des Kegelschnittes aus drei reellen und ein Paar reellen oder imaginären Punkten, und wir sehen, dass dieselbe vollständig bestimmt ist.

Da die Construktion des Kegelschnittes, im Falle die gegebenen Involutionen hyperbolisch sind, bereits auf andere Art im Kap. III, § 2 durchgeführt wurde, so haben die in diesem Paragraphen gegebenen Construktionen besondere Wichtigkeit dann, wenn die Involutionen conjugirter Pole elliptisch sind. Dasselbe gilt von den sogleich durchzufüh-

renden Construktionen des Kegelschnittes, von dem Involutionen conjugirter Polaren gegeben sind.

Anmerkung. Die Involution auf dem Kreise, deren Polare die unendlich ferne Gerade G_∞ der Ebene ist, hat den Mittelpunkt m desselben zum Pol, dieselbe wird daher aus irgend einem Punkte a des Kreises durch eine circulare Involution projicirt und mithin liegen conjugirte Pole α_∞, α'_∞ auf G_∞ in zu einander senkrechten Richtungen (Folgerung 1 zu Lehrsatz 2 des § 6, Kap. III), d. h. *alle Kreise der Ebene haben auf G'_∞ eine bestimmte Involution conjugirter Pole, welche durch die zu einander senkrechten Geraden der Ebene auf G_∞ ausgeschnitten wird.* Diese Involution auf G_∞ möge die circulare heissen. Dieselbe wird aus jedem Punkte der Ebene durch eine circulare Strahleninvolution projicirt.

Da alle Kreise daher auf G_∞ ein Paar imaginärer Punkte gemeinschaftlich haben, so ist jeder Kreis nach der 3ten Aufgabe durch drei weitere Punkte bestimmt.

Aufgabe. Ein Kreis ist zu construiren, von dem gegeben sind ein Paar imaginärer Punkte auf $\mathfrak{P}$ und ein reeller Punkt a. Die Lösung gibt die Construktion der Aufgabe 2, man hat nur an Stelle $\mathfrak{Q}$ die G_∞ zu setzen und zu beachten, dass t, τ_1 sowie β, β' zu einander senkrechte Richtungen sind.

4. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind gegeben der Pol $\mathfrak{p}$ und seine Polare $\mathfrak{P}$, die Involution conjugirter Polaren in $\mathfrak{p}$ (also auch die Polinvolution auf $\mathfrak{P}$) und eine Tangente A; derselbe ist zu construiren.

Fig. 42. Es möge die Tangente A von $\mathfrak{P}$ in t geschnitten werden und dem Strahle $\overline{\mathfrak{p}t}$ sei der Strahl $\overline{\mathfrak{p}\tau}$ in der Polareninvolution in $(\mathfrak{p})$ conjugirt. Sucht man nun den Strahl A' von (t), welcher A harmonisch trennt von $\mathfrak{P}$ und $\overline{t\mathfrak{p}}$, so mögen die Schnittpunkte von $\mathfrak{p}\tau$ mit A und A' durch a, a' bezeichnet sein. Es sei ferner $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{b}'}$ ein Paar conjugirter Polaren von $(\mathfrak{p})$, welche A, A' in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ schneiden. Zieht man nun $\overline{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = B$, so wird der Kegelschnitt K, welcher durch a, a' geht und A, A', B zu Tangenten hat, der verlangte sein, denn er besitzt in $\mathfrak{p}$ die gegebene Involution conjugirter Polaren und hat $\mathfrak{P}$ zum Pol von $\mathfrak{p}$. (Lehrsatz 1.)

Ein Kegelschnitt ist also durch eine relle Tangente und ein Paar imaginärer Tangenten, nebst ihren Berührungspunkten vollständig bestimmt.

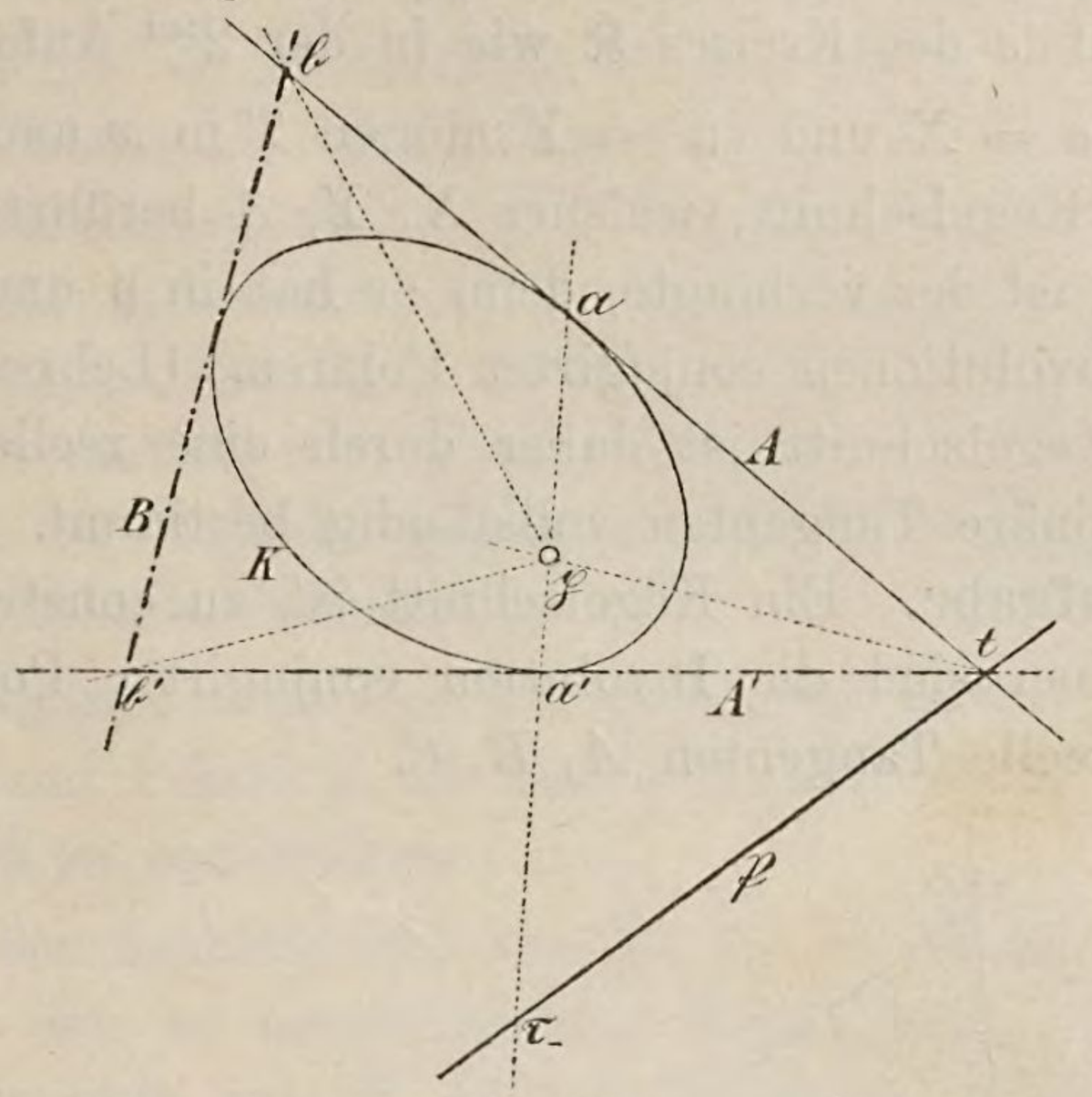


Fig. 42.

5. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind gegeben die Involutionen conjugirter Polaren in zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ und eine Tangente A; derselbe ist zu construiren. Wir setzen wenigstens eine der Involutionen elliptisch voraus.

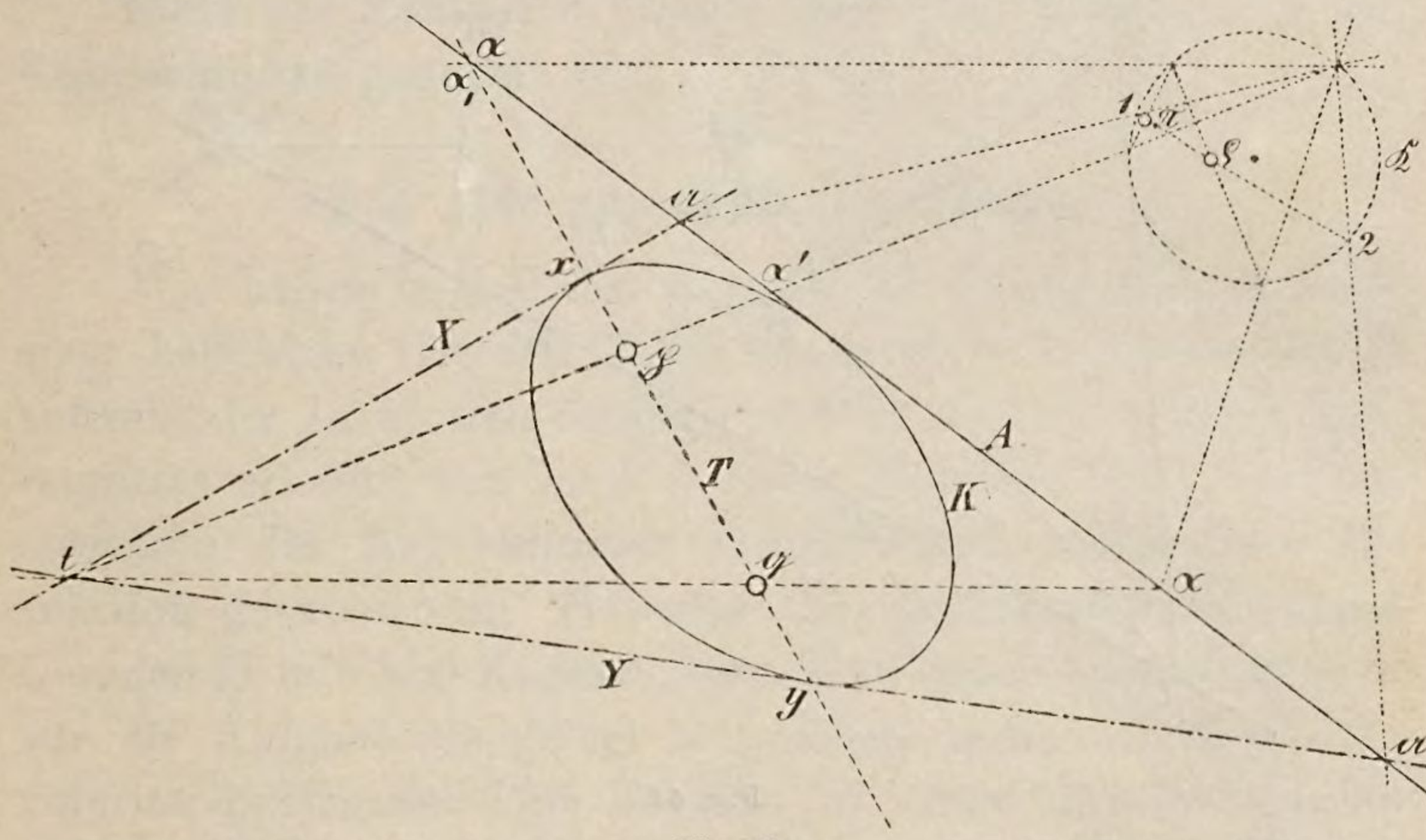


Fig. 43.

Dem Strahle $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}} = T$ entspricht in den Involutionen der Fig. 43. Strahl $\overline{\mathfrak{p}\,t}$ resp. $\overline{\mathfrak{q}\,t}$, dann ist t der Pol von T von dem zu con-

struirenden Kegelschnitte. Die Tangente A schneidet die Involutionen von (𝔭) und (𝔮) in je einer Punktinvolution und es möge $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ das beiden gemeinschaftliche Paar sein (construirt mittels des Kreises $\mathfrak{K}$ wie in der 2ten Aufgabe). Die Strahlen $\overline{t\mathfrak{a}} = X$ und $\overline{t\mathfrak{a}'} = Y$ mögen T in x und y schneiden. Der Kegelschnitt, welcher X, Y, A berührt und durch x, y geht, ist der verlangte, denn er hat in 𝔭 und 𝔮 die gegebenen Involutionen conjugirter Polaren. (Lehrsatz 1.)

Ein Kegelschnitt ist daher durch eine reelle und zwei Paar imaginäre Tangenten vollständig bestimmt.

6. Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist zu construiren, von dem gegeben sind die Involution conjugirter Polaren in 𝔭 und drei reelle Tangenten A, B, C.

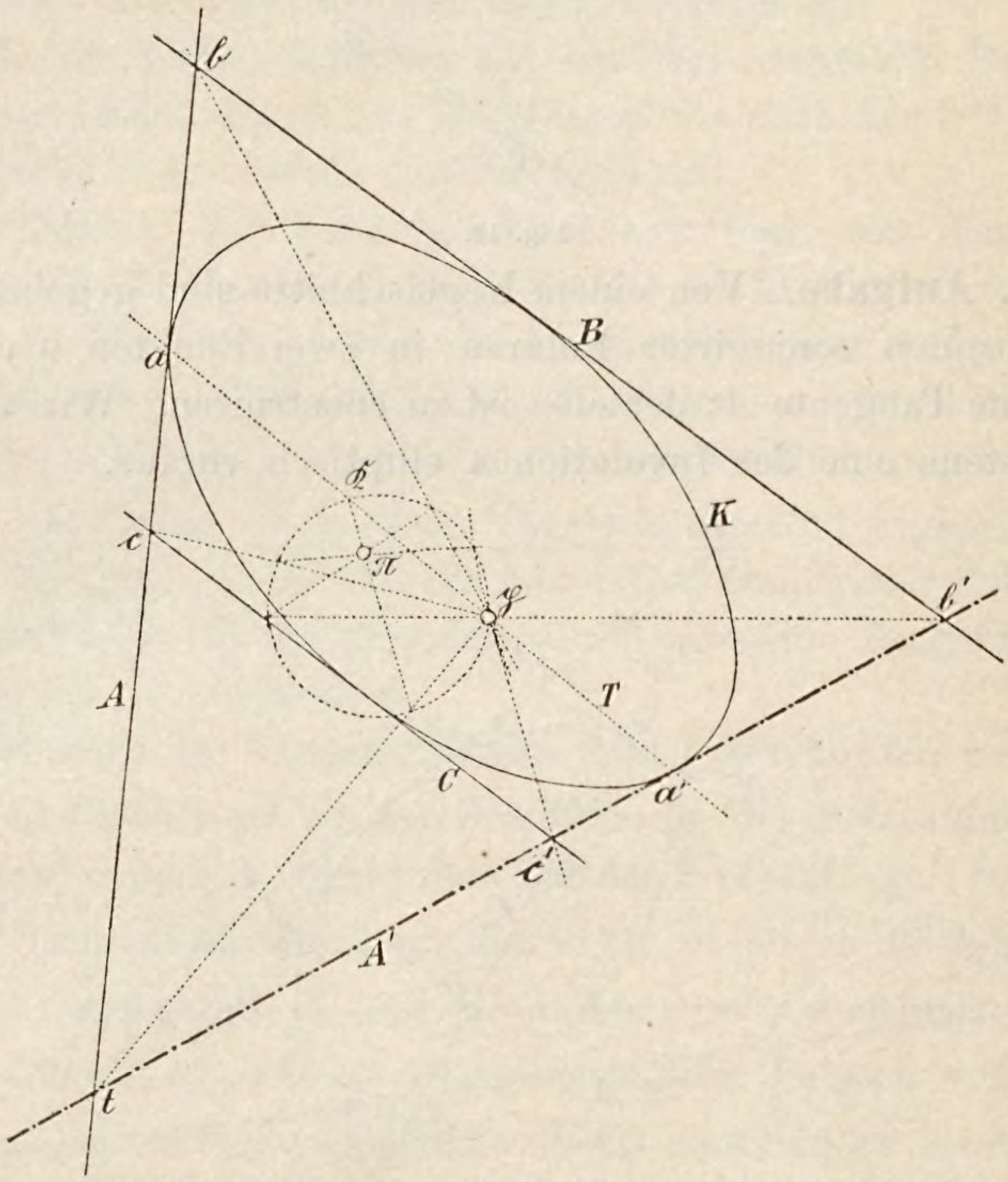


Fig. 44.

Fig. 44. Die Aufgabe kann genau so wie die 5te gelöst werden, denn im Schnittpunkte 𝔮 von B, C ist die Involution conjugirter Polaren durch ihre Deckstrahlen B, C gegeben. Man

kann aber auch folgendermassen verfahren. Es möge A von B und C in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ geschnitten werden, und die zu $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{c}}$ conjugirten Polaren von $\mathfrak{p}$ sollen B und C in $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ schneiden. Die Gerade $\overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'} = A'$ schneide A in t und T sei die zu $\overline{\mathfrak{p}t}$ conjugirte Polare, also die Polare von t; sie schneidet A, A' in den Berührungspunkten a, a' des Kegelschnittes. Denn der Kegelschnitt, welcher A, A', B zu Tangenten und a, a' zu Berührungspunkten hat, berührt auch C und hat in $\mathfrak{p}$ die gegebene Involution conjugirter Polaren.

Die in der Aufgabe gegebenen Stücke bestimmen daher einen Kegelschnitt vollständig.

7. Aufgabe. Von einem Kegelschnitt sind gegeben zwei Paar Pol und Polare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{Q}$, sowie ein Punkt a; derselbe ist zu construiren.

Ist t der Schnittpunkt von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, so ist $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} = T$ seine Polare für den zu construirenden Kegelschnitt. Sind $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ mit T, so ist durch die Paare $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ auch die Involution conjugirter Pole auf T bestimmt, der Kegelschnitt also nach der 1. Aufgabe construirbar.

Der Kegelschnitt ist immer bestimmt, wenn nur $\mathfrak{P}$ nicht durch $\mathfrak{q}$ geht, also $\mathfrak{Q}$ auch $\mathfrak{p}$ enthält.

Statt des Punktes a könnte auch eine Tangente A des Kegelschnittes gegeben sein.

§ 2. Die adjungirte Involution.

Wir haben in § 6 des Kap. III die Deckpunkte der auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{P}$ der Ebene eines Kegelschnittes K auftretenden Involution conjugirter Pole als Punkte des Kegelschnittes erkannt und im § 1 dieses Kapitels auch die Construktion des Kegelschnittes durchgeführt, wenn diese Involution gegeben war. Hat man also die Schnittpunkte einer Geraden $\mathfrak{P}$ mit dem Kegelschnitte K zu bestimmen, so können wir die Aufgabe als gelöst betrachten, wenn auf $\mathfrak{P}$ die Involution conjugirter Pole bekannt ist. Sind ihre Deckpunkte reell, so sind sie die zwei Schnittpunkte von K mit $\mathfrak{P}$; ist die Involution elliptisch, so stellt sie zwei imaginäre Punkte von K vor.

1. Aufgabe. Ein Kegelschnitt K ist als das Erzeugnis zweier projektivischer Büschel (a), (a') gegeben; man bestimme seine Schnittpunkte mit einer willkürlichen Geraden G, d. h. man gebe auf G die Involution conjugirter Pole von K an.

Fig. 45. Die Büschel (a), (a') schneiden auf G zwei conlocale projektivische gerade Gebilde aus. Homologe Punkte mögen mit demselben Buchstaben bezeichnet und das von (a') herrührende mit einem Strich versehen werden. Dem Punkte $x = y'$ von G sollen die Punkte x' und y entsprechen und $\mathfrak{x}$ sei der Punkt, welcher $x = y'$ von x' und y harmonisch

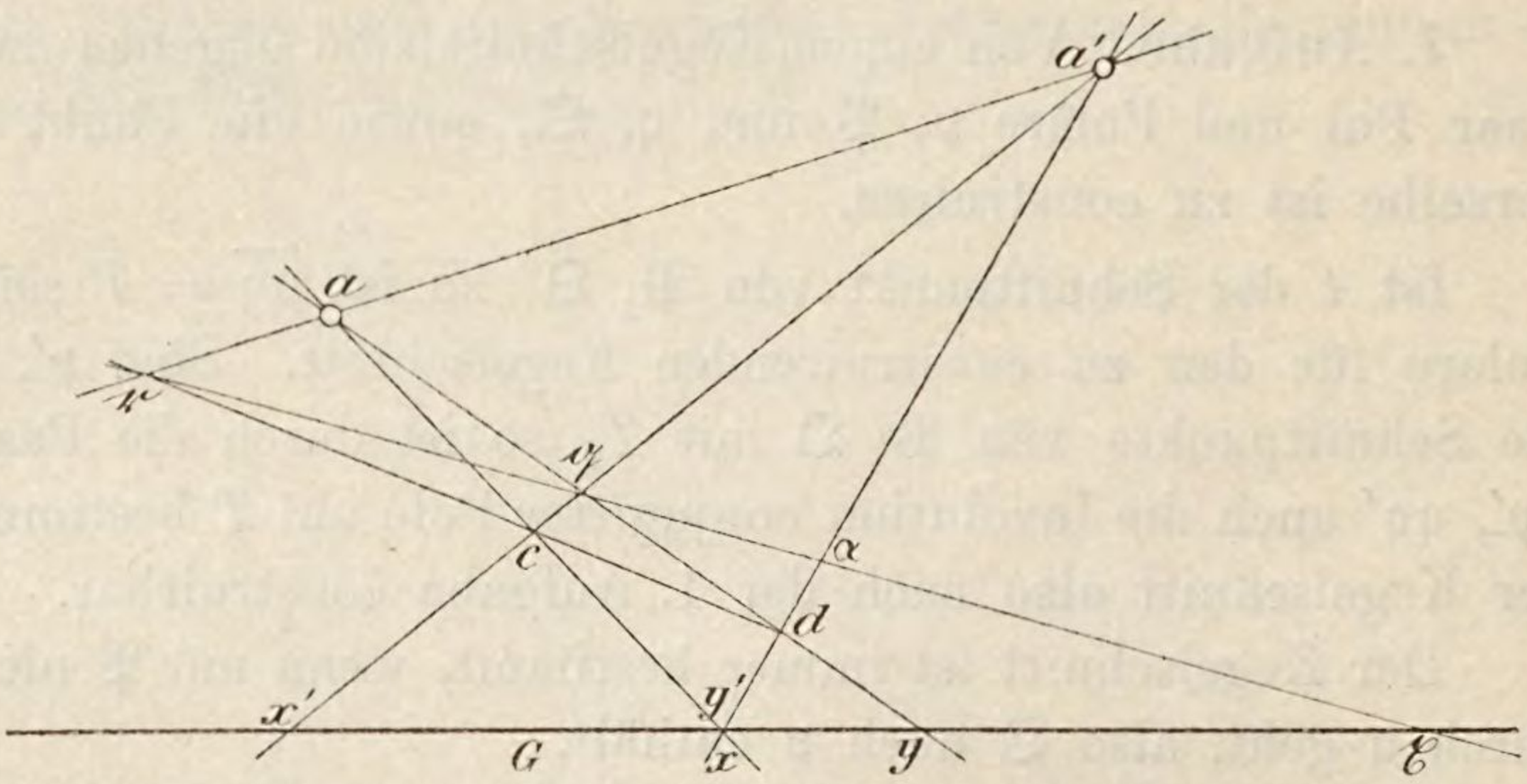


Fig. 45.

trennt. Dann beschreiben $x\mathfrak{x}$ die Polinvolution auf G, wenn $x = y$ die Gerade G durchläuft. Denn die Schnittpunkte c und d von $\overline{ax}$, $\overline{a'x'}$ resp. $\overline{ay}$, $\overline{a'y'}$ sind Punkte von K; schneiden sich daher $\overline{ad}$, $\overline{a'c}$ in $\mathfrak{q}$ und $\overline{aa'}$, $\overline{cd}$ in $\mathfrak{r}$, so ist $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ Polare von $x = y'$ für K. Da nun $[x\,d\,\alpha\,a']$ ein harmonisches Quadrupel ist (α der Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ mit $\overline{a'x}$), so ist auch $[xy\mathfrak{x}x']$ ein solches, als Projektion des ersteren aus $\mathfrak{q}$.

Mithin sind x, $\mathfrak{x}$ conjugirte Pole von K. Die Involution ist durch ein zweites Paar bestimmt. Die Construktion selbst lässt sich mit dem Lineal allein durchführen.

Hat man zu $z = t'$ noch den Punkt $\mathfrak{z}$ bestimmt, so ergibt auch, wenn man $\mathfrak{z}$ auf dieselbe Art wie $\mathfrak{x}$ mit Hilfe der Polaren des Punktes $z = t'$ construirt, der Schnittpunkt dieser Polaren den Pol g von G für K, und $\overline{gz}$, $\overline{g\mathfrak{z}}$ sowie $\overline{gx}$, $\overline{g\mathfrak{x}}$

bestimmen als zwei Paare die Involution conjugirter Polaren in (g).

2. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind gegeben:

a) fünf Punkte, b) vier Punkte und die Tangente in einem derselben, c) drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben, d) ein Paar imaginärer Punkte und ihre Tangenten sowie ein reeller Punkt, e) zwei Paar imaginärer Punkte und ein reeller Punkt, f) ein Paar imaginärer und drei reelle Punkte; man soll bei jeder der Angaben die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einer beliebigen Geraden der Ebene bestimmen.

Die Aufgaben a), b), c) löst man einfach nach dem Vorgange der Aufgabe 1. Die c), d), e) können darauf nach Kap. III, § 8 zurückgeführt werden, indem man den Kegelschnitt durch die reellen Bestimmungsstücke gegeben denkt, welche daselbst aus den imaginären construirt wurden.

Die in den vorstehenden Aufgaben durchgeführten Constructionen ergeben ohne Weiteres den folgenden

Lehrsatz 1. *Hat man zwei conlocale projektivische Gebilde und bestimmt man zu jedem Element $x = y'$ des Trägers dasjenige $\mathfrak{x}$, welches ihm in Bezug auf die homologen Elemente x' und y harmonisch zugeordnet ist, so beschreibt x, $\mathfrak{x}$ eine Involution, während $x = y'$ alle Elemente des Trägers durchläuft. Die so entstehende Involution soll zu den projektivischen Gebilden adjungirt heissen.*

Liegen die beiden projektivischen Gebilde auf einer Geraden und werden sie, jedes aus einem Punkte der Ebene, projicirt, so erzeugen die Büschel einen Kegelschnitt K, und aus der Lösung der Aufgabe 1 ergibt sich, dass dann x, $\mathfrak{x}$ auf der Geraden die Polinvolution von K beschreiben.

Durch Projektionen und Schnitte können aber conlocale projektivische Gebilde stets auf eine Gerade gebracht werden, also gilt der Lehrsatz für beliebige Gebilde.

Lehrsatz 2. *Liegen zwei krumme projektivische Gebilde auf einem Kegelschnitte K, so ist ihre Vervollständigungsaxe T Polare der ihnen adjungirten Involution.*

Ist T die Vervollständigungsaxe der auf K liegenden pro- Fig. 46.
jektivischen Gebilde und a, a' ein Paar homologer Punkte, so wird die Projektion eines jeden Punktes von T aus a' und a

auf K ein Paar homologer Punkte sein (Kap. III, § 4). Ist $\mathfrak{p}$ der Schnittpunkt von T mit der Tangente des Punktes a, so wird $\overline{a'\mathfrak{p}}$ den K in dem Punkte b schneiden, dessen homologer b' in a liegt. Die Polare $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ geht durch $a = b'$ und schneidet K noch in dem Punkte $\mathfrak{a}$, der $a = b'$

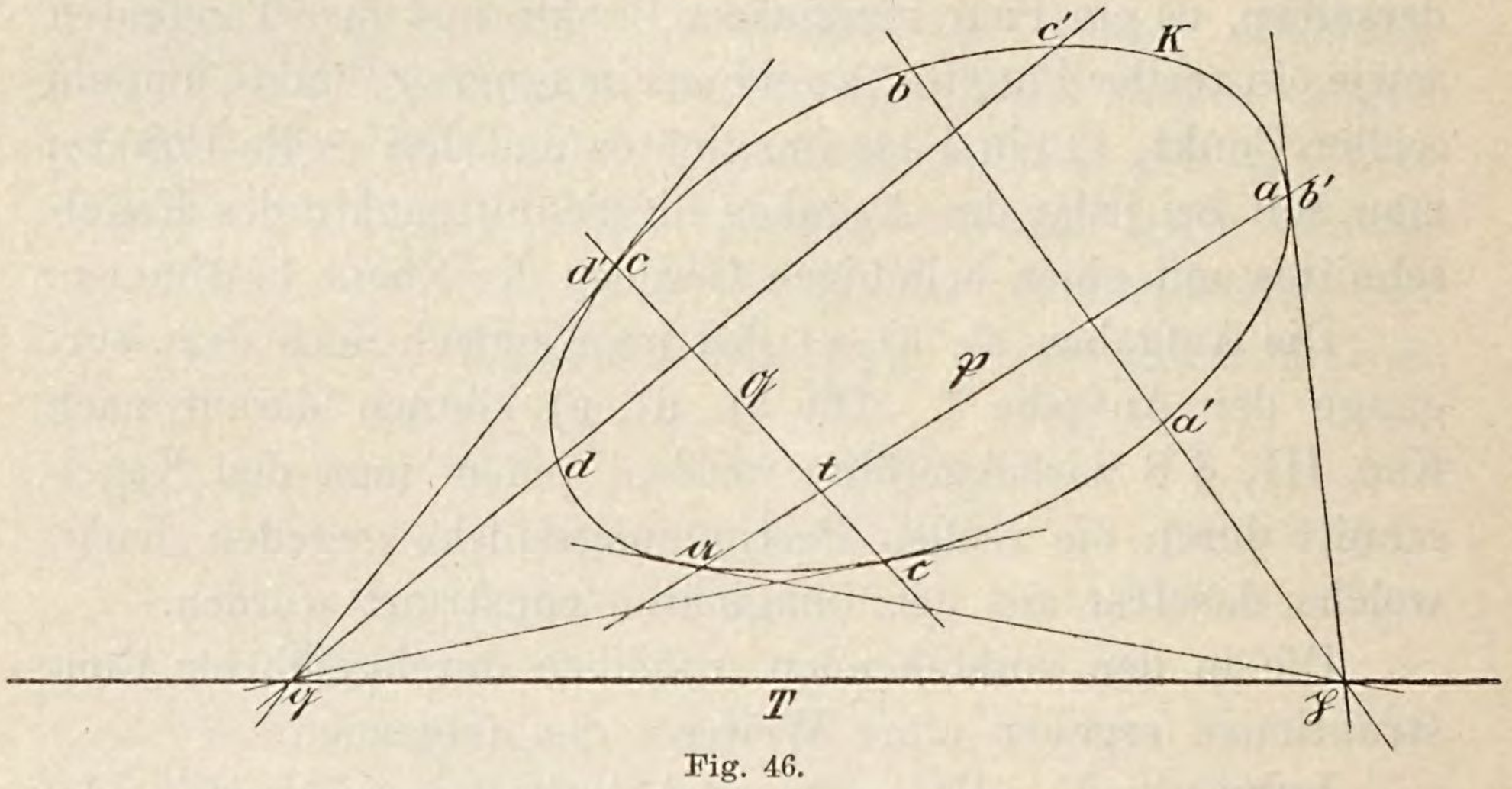


Fig. 46.

von a', b harmonisch trennt [da a, $\mathfrak{a}$ Deckpunkte der Involution sind, deren Paar $a'b$ ist], so dass also $a\mathfrak{a}$ ein Paar der adjungirten Involution ist. Wird für den Punkt $c = d'$ von K, dessen Tangente in $\mathfrak{q}$ die T schneidet, und dessen homologe c', d also auf einer Geraden durch $\mathfrak{q}$ liegen, der Punkt $\mathfrak{c}$ construirt, der auf der Polare $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{q}$ liegt, so ist die adjungirte Involution durch a, $\mathfrak{a}$ und c, $\mathfrak{c}$ als zwei ihrer Paare bestimmt. Ihr Pol t ist als Schnittpunkt der Polaren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auch Pol von $T = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}}$ in Bezug auf K, also ist T die Polare dieser Involution.

Schneidet die Vervollständigungsaxe T den Kegelschnitt in den zwei Punkten g, h, so sind diese Deckpunkte der projektivischen Gebilde auf K, aber auch gleichzeitig der adjungirten Involution. Schneidet die Axe T den Kegelschnitt nicht, so haben die projektivischen Gebilde auf K keine Deckpunkte, die adjungirte Involution wird dann elliptisch. Da wir aber als Deckpunkte der elliptischen Involution das Paar imaginärer Punkte von K definirten, in welchen ihre Polare den K schneidet, so werden wir folgerichtig sagen, *die conlocalen projektivischen Gebilde auf K haben dieselben Deck-*

elemente wie die ihnen adjungirte Involution. Die Deckelemente sind also *reell*, wenn die adjungirte Involution hyperbolisch, und *imaginär*, wenn dieselbe elliptisch ist.

Dies findet natürlich auch statt, wenn der Träger der conlocalen Gebilde eine Gerade oder ein Strahlenbüschel ist.

Ist in speciellem Falle die adjungirte Involution parabolisch, so ist ihre Polare Tangente von K und die projektivischen conlocalen Gebilde auf K haben zwei in dem Berührungspunkte der Tangente zusammenfallende Deckpunkte, welche auch für die parabolische Involution coïncidirende Deckpunkte sind.

2. Aufgabe. Von zwei conlocalen projektivischen Gebilden sind ein Paar homologer Elemente und die ihnen adjungirte Involution gegeben; man soll zu einem beliebigen Elemente sein homologes construiren.

Denkt man sich die Involution und die homologen Elemente auf einen Kegelschnitt, etwa einen Kreis, projicirt, und ist T die Polare der Involution, sowie a, a' das gegebene Paar homologer Punkte, so zeigt die Fig. 47 die Construktion des Punktes x', welcher x homolog ist.

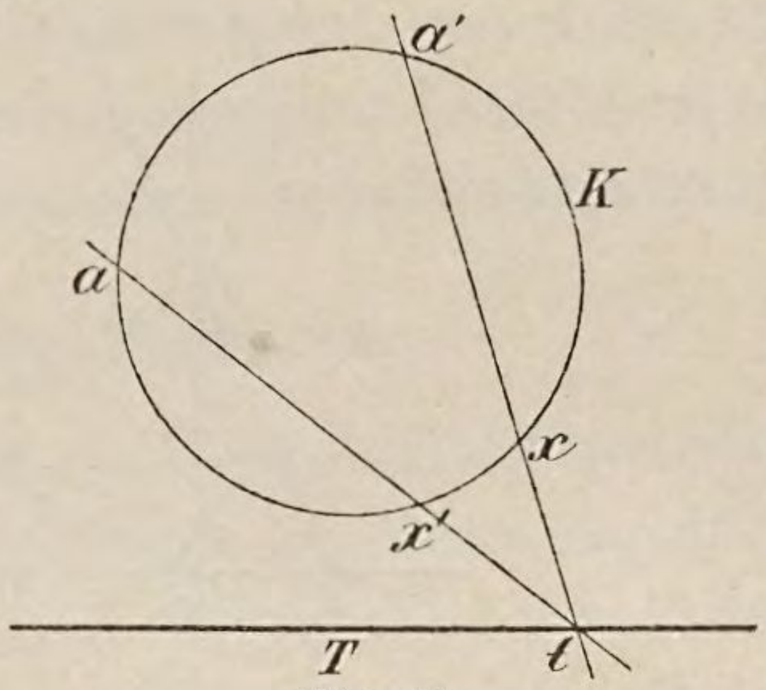


Fig. 47.

3. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind gegeben:

a) fünf Tangenten, b) vier Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben, c) drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben, d) ein Paar imaginärer Tangenten und ihre Berührungspunkte sowie eine reelle Tangente, e) zwei Paar imaginärer Tangenten und eine reelle, f) ein Paar imaginärer Tangenten und drei reelle; man bestimme die Involution conjugirter Polaren von K für einen beliebigen Punkt der Ebene.

Nach Kap. III, § 3, Lehrsatz 2 hat man nur die adjungirte Involution der conlocalen projektivischen Büschel zu construiren, welche die projektivischen Punktreihen auf den zwei Tangenten A, B von K projiciren. Übrigens zeigt die Construktion der adjungirten Involution dieser projektivischen

conlocalen Strahlenbüschel direct, dass ihre Paare conjugirte Polaren von K sind.

Definition. Hat man zwei conlocale Involutionen und sucht zu jedem Elemente des Trägers die zwei Elemente, welche ihm in der einen und anderen Involution entsprechen, so beschreiben die letzteren zwei projektivische Gebilde und die diesen *adjungirte* Involution *soll auch zu den beiden gegebenen Involutionen adjungirt heissen.*

Lehrsatz 3. *Hat man zwei Involutionen auf demselben Kegelschnitte gegeben, deren Pole p und $\mathfrak{p}$ sind, so hat die ihnen adjungirte Involution die Gerade $\overline{p\mathfrak{p}}$ zur Polare.*

Fig. 48. Denn sei x ein Punkt von K, und $\overline{\mathfrak{p}x}$ möge K in a schneiden, dann ist der Schnittpunkt von $\overline{pa}$ mit K der

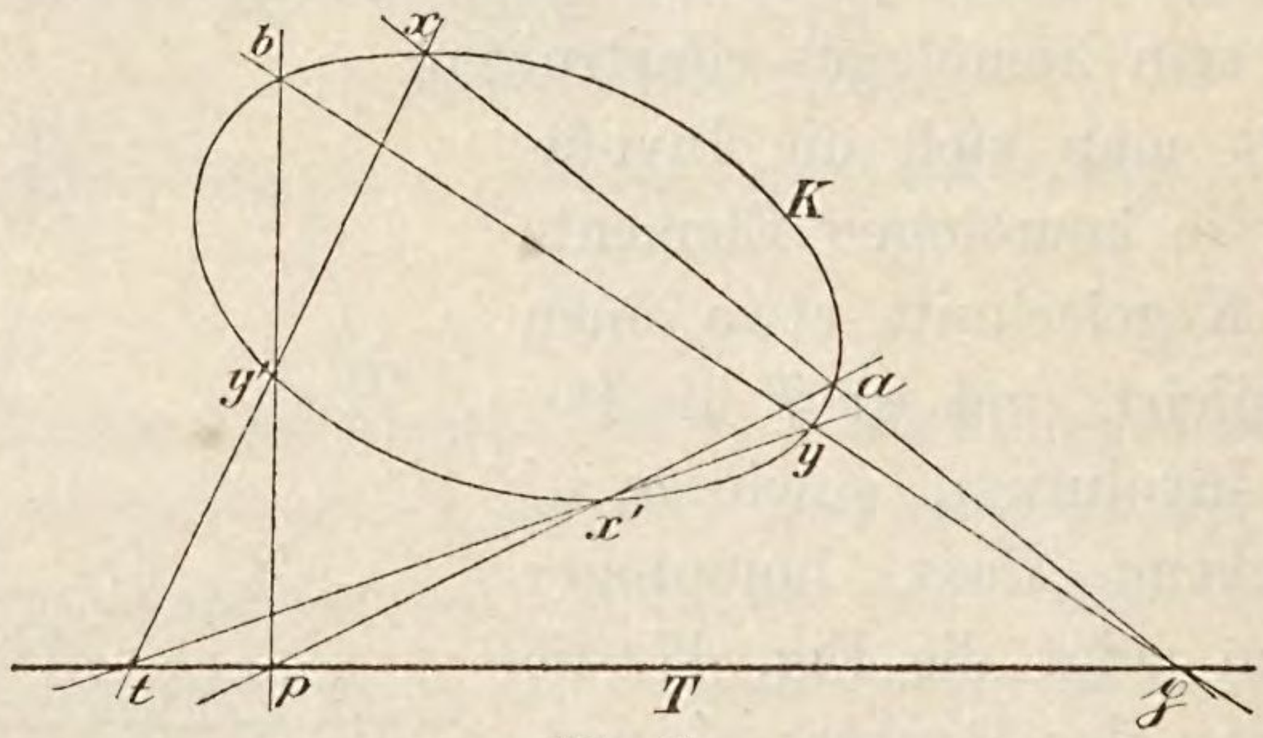


Fig. 48.

Punkt x', welcher x in den oben construirten projektivischen Gebilden entspricht. Schneidet analog $\overline{\mathfrak{p}y}$ in b, so bestimmt $\overline{pb}$ den Punkt y', welcher y zugeordnet ist. Es sind also x, x' und y, y' zwei Paar homologer Punkte der oben definirten projektivischen Punktreihen und wir haben nur zu zeigen, dass $\overline{xy'}$ sich mit $\overline{x'y}$ auf $\overline{p\mathfrak{p}}$ schneiden, denn dann ist $\overline{p\mathfrak{p}}$ die Polare der den projektivischen Gebilden adjungirten Involution (Lehrs. 1). Dass der Schnittpunkt t von $\overline{xy'}$ mit $\overline{x'y}$ aber auf $\overline{p\mathfrak{p}}$ liegt, folgt daraus, dass das Sechseck $xax'yby'$ dem Kegelschnitte K eingeschrieben, also ein Pascal'sches Sechseck ist (Zusatz zu § 4. Kap. III, Seite 52).

Folgerung 1. Ist eine der gegebenen Involutionen elliptisch, so ist die ihnen adjungirte Involution stets hyperbolisch. Sind beide Involutionen hyperbolisch und g, h; $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$

ihre Deckelemente, so sind gh und $\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}$ je ein Paar der adjungirten Involution. Ist eine der Involutionen parabolisch, so ist ihr Deckelement d auch Deckelement der adjungirten Involution, das andere Deckelement d' der letzteren ist dasjenige, welches d in der zweiten gegebenen Involution entspricht. Sind beide Involutionen parabolisch, d, $\mathfrak{d}$ ihre Deckelemente, so sind d, $\mathfrak{d}$ die Deckelemente der adjungirten Involution.

2. Ist die adjungirte Involution elliptisch, so sind die gegebenen Involutionen hyperbolisch und ihre Deckelemente g, h und $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ trennen einander.

3. Ist die adjungirte Involution hyperbolisch, so sind ihre Deckelemente ein Paar, welches beiden Involutionen angehört (Kap. III, § 7, Folgerung 5 zu Lehrsatz 2).

4. Ist die adjungirte Involution parabolisch, so haben beide gegebenen Involutionen ein Deckelement gemeinschaftlich, welches auch Deckelement der adjungirten Involution ist. Es haben also beide gegebenen Involutionen reelle Deckelemente.

§ 3. Die imaginären Elemente.

Wir haben in Kap. III, § 6, S. 61 die Deckpunkte einer elliptischen Involution auf dem Kegelschnitte als ein Paar imaginärer Punkte des Kegelschnittes definirt, in welchen er die Polare der Involution schneidet, so dass wir diese auch gleichzeitig als Punkte der Polare betrachteten, wobei sie dann als Deckpunkte der Involution conjugirter Pole aufgefasst wurden.

Wir sehen nun vom Kegelschnitte ab und definiren:

Die Deckelemente einer Involution sind zwei Elemente des Trägers, dieselben sind reell, wenn die Involution hyperbolisch, und imaginär, wenn sie elliptisch ist. Ist die Involution parabolisch, so fallen sie in ein Element zusammen.

Also haben auch zwei conlocale projektivische Gebilde stets zwei Deckelemente, die Elemente ihres Trägers sind. Dieselben sind reell, imaginär, oder fallen zusammen, je nachdem die adjungirte Involution hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist.

Durch diese Definition treten zu den reellen Elementen der Gebilde noch doppelt unendlich viele imaginäre Elementen-

paare hinzu. Denn sind a, b irgend zwei feste Elemente des Gebildes und wählt man a', b' willkürlich, so sagt die obige Definition aus, dass die Deckelemente aller der Involutionen, die durch b, b' und a, a' als Paare derselben bestimmt werden, Elemente des Trägers sind. Diese werden stets imaginär, wenn b, b' die Elemente a, a' trennen (Kap. I, § 3, Seite 18). Da sowol a' als b' unter der einfach unendlichen Mannigfaltigkeit reeller Elemente des Trägers gewählt werden können, so erhält man doppelt unendlich viele Involutionen, deren Deckelemente dem Träger angehören.

Wir sagen ein imaginäres Punktepaar ist Schnitt oder Projektion eines anderen, wenn die elliptischen Involutionen, welche das Punktepaar bestimmen, Schnitte oder Projektionen von einander sind. Für ein reelles Punktepaar ist diese Definition ebenfalls zulässig.

Um das in der elliptischen Involution auftretende imaginäre Paar Deckelemente von einander zu trennen, also die imaginären Elemente auch einzeln zu individualisiren, hat v. Staudt den Sinn eingeführt, in welchem ein Element seinen Träger beschreibt. Wir haben in Kap. I, § 3, Seite 17 gesehen, dass wenn das Element a seinen Träger in einem bestimmten Sinne beschreibt, das conjugirte Element a' in der elliptischen Involution diesen in demselben Sinne beschreiben muss. Ordnet man also dem einen Sinne im Träger das *eine* imaginäre Element zu, so wird naturgemäss dem entgegengesetzten Sinne das *andere* imaginäre Element zugeordnet erscheinen.

Die in dieser Weise individualisirten Punkte werden auch *conjungirt imaginär* genannt.

Sind z. B. aa', bb' zwei Paare einer elliptischen Involution, so wird a, a' von b, b' getrennt und es ist dem Sinne $a\,b\,a'\,b'$ das *eine* imaginäre Deckelement und dem Sinne $a\,b'\,a'\,b$ das andere ihm *conjungirte* zugeordnet.

Durch Projektion oder Schnitt geht dann auch ein bestimmtes imaginäres Element in ein bestimmtes über.

1. Aufgabe. Man hat zwei imaginäre Punktepaare, die wir mit g, h und g', h' bezeichnen wollen, auf den Geraden A und A' gegeben durch die Involutionen $\{A\}$ und $\{A'\}$; man

soll die vier noch fehlenden Geraden bestimmen, die dieselben paarweise mit einander verbinden. Diese müssen natürlich imaginär sein, da ein imaginärer Punkt nur auf *einer* reellen Geraden liegen kann.

Man suche zu dem Schnittpunkte $a = a'$ beider Geraden Fig. 49. A, A' den Punkt $\mathfrak{a}$ resp. $\mathfrak{a}'$, der ihm in den Involutionen $\{A\}$

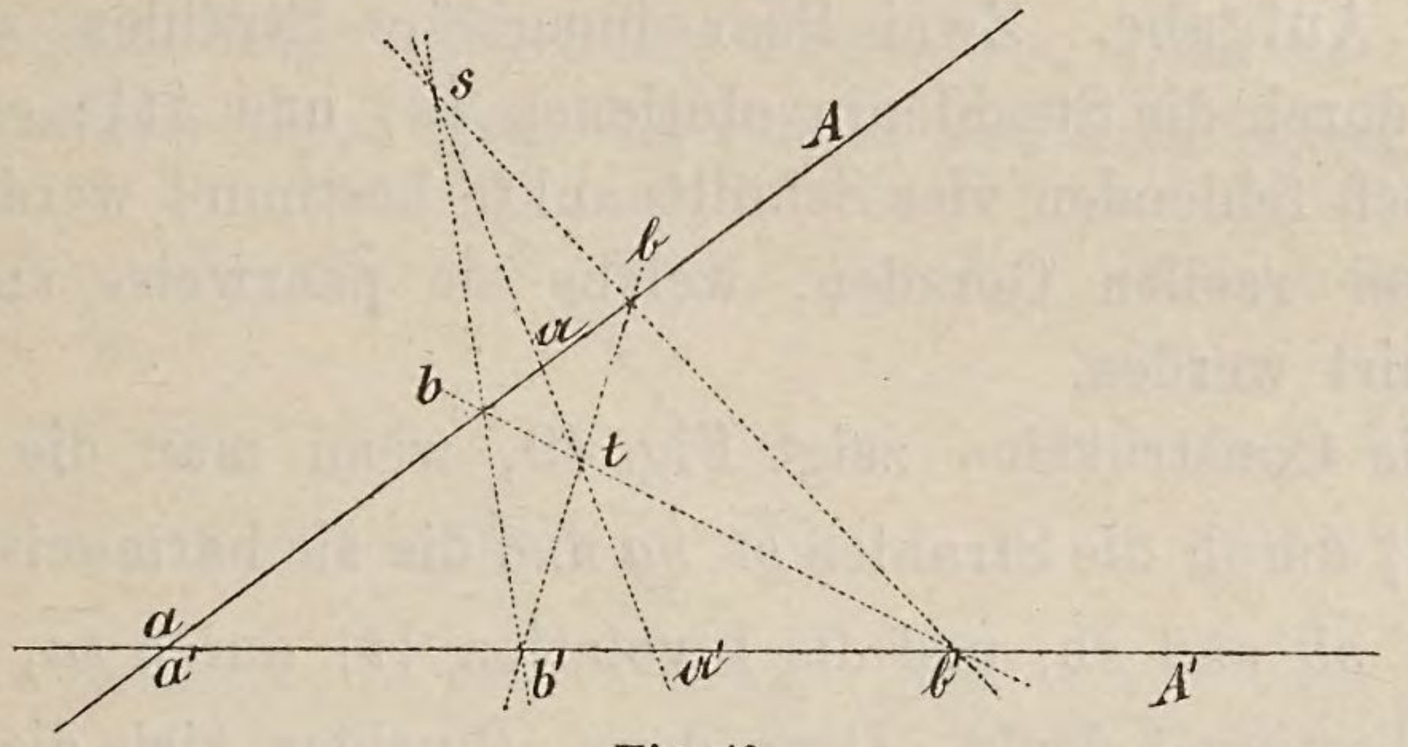


Fig. 49.

resp. $\{A'\}$ entspricht. Es sei ferner $b\,\mathfrak{b}$ das Paar der Involution $\{A_1\}$, welches a, $\mathfrak{a}$ harmonisch trennt, und ebenso $b'\,\mathfrak{b}'$ das Paar von $\{A\}$, welches a', $\mathfrak{a}'$ harmonisch trennt (Kap. III, § 7, Folgerung 6 zu Lehrsatz 2, Seite 65).

Da nun sowol

$$[a\,b\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] \barwedge [a'\,b'\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}']$$

als auch

$$[a\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,b] \barwedge [a'\,b'\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}']$$

ist, so liegen die geraden Gebilde a, b, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und a', b', $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ perspektivisch d. h. $\overline{bb'}$, $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$, $\overline{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}$ schneiden sich in einem Punkte s, und ebenso auch die geraden Gebilde a, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, b und a', b', $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ d. h. $\overline{\mathfrak{b}b'}$, $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$, $\overline{b\mathfrak{b}'}$ schneiden einander in einem Punkte t.

Projicirt man nun die Involution $\{A\}$ aus s oder t auf A', so erhält man offenbar auf A' die gegebene Involution $\{A'\}$, da sie durch die Paare $a'\,\mathfrak{a}'$ und $b'\,\mathfrak{b}'$ bestimmt ist. Also projiciren sich die Punkte g, h von A aus s und t in die Punkte g', h', oder die zwei Paar Deckstrahlen der elliptischen Involutionen $\{s\}$ und $\{t\}$, welche beide Involutionen $\{A\}$ und $\{A'\}$ gleichzeitig aus s resp. t projiciren, sind die vier gesuchten Geraden.

Sind die Punkte g, h, g', h' individualisirt, so ist es auch einfach die Geraden zu individualisiren, welche sie verbinden. Ist z. B. g dem Sinne $(a\,b\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ und g' dem Sinne $(a'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}'\,b')$ zugeordnet, so wird die Gerade, welche g mit g' verbindet, durch t gehen und dem Sinne $t(a\,b\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$, welcher derselbe ist, wie $t(a'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}'\,b')$, zugeordnet sein.

2. Aufgabe. Zwei Paar imaginäre Strahlen sind gegeben durch die Strahleninvolutionen $\{s\}$ und $\{t\}$; es sollen ihre noch fehlenden vier Schnittpunkte bestimmt werden d. h. die zwei reellen Geraden, welche sie paarweise enthalten, construirt werden.

Die Construktion zeigt Fig. 49, wenn man die Involution $\{s\}$ durch die Strahlen $\overline{st}$, $\overline{sa}$ und die sie harmonisch trennenden $\overline{sb}$ und $\overline{s\mathfrak{b}}$, und die Involution $\{t\}$ durch $\overline{ta}$, $\overline{t\mathfrak{a}}$ und $\overline{tb}$, $\overline{t\mathfrak{b}}$ bestimmt denkt. Denn dann schneiden sich die harmonischen Strahlenpaare auf zweien durch a gehenden Geraden A, A', welche die Involution $\{s\}$ und $\{t\}$ in je derselben Punktinvolution schneiden.

Anmerkung. Sind die Involutionen $\{A\}$ und $\{A'\}$ Involutionen conjugirter Pole in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt K, der also durch die imaginären Punktepaare g, h und g', h' geht, so ist $\overline{st}$ Polare von a in Bezug auf K und nach dem Lehrsatze 3, § 7, Kap. III, Seite 65 sind s, t conjugirte Pole von K, da b, $\mathfrak{b}$ und b', $\mathfrak{b}'$ es sind.

Das Dreieck $a\,s\,t$ ist also ein Poldreieck von K.

Beachtet man, dass $[s\,\mathfrak{a}\,t\,\mathfrak{a}']$ ein harmonisches Quadrupel ist, so ergiebt sich folgender Satz:

Ist a, s, t ein Tripel conjugirter Pole eines Kegelschnittes K, legt man durch a eine willkürliche Gerade A und projicirt die auf A auftretende Involution conjugirter Pole aus s und t, so schneiden sich die Strahlenpaare in Punkten einer Geraden A', die durch a geht und A von $\overline{at}$, $\overline{as}$ harmonisch trennt. Die Schnittpunkte der Strahlenpaare auf A' bilden die Involution conjugirter Pole von K auf dieser Geraden.

Es werden die Schnittpunkte von A mit K aus s und t in die Schnittpunkte von A' mit K projicirt. Für reelle Schnittpunkte wurde der Satz in Kap. III, § 7, Seite 61 ausgesprochen.

3. Aufgabe. Es ist eine Gerade A und ein Kegelschnitt K gegeben; man soll aus einem beliebigen Punkte s der Ebene die Schnittpunkte von A mit K auf K projiciren und die Gerade A' angeben, welche diese Punkte enthält.

Wir construiren die Gerade A' ohne Rücksicht darauf, ob die Schnittpunkte von A mit K reell oder imaginär sind, nach obigem Satze. Ist S die Polare von s für K, welche A in a schneidet, so geht die Polare von a in Bezug auf K Fig. 50.

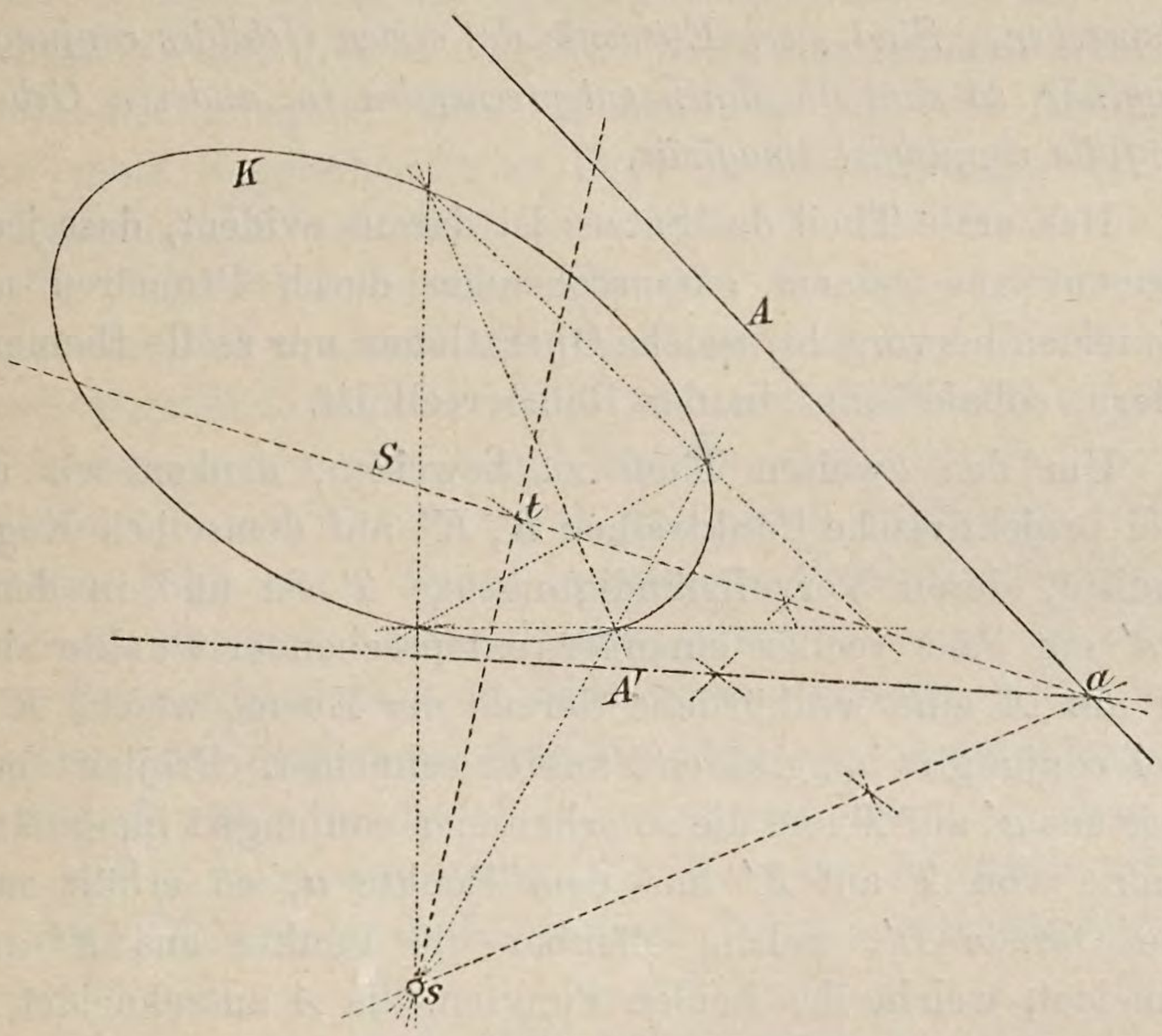


Fig. 50.

durch s, schneidet S in t, so dass a, s, t ein Tripel conjugirter Punkte ist. Trennt nun A' die Gerade A von $\overline{at}$ und $\overline{as}$ harmonisch, so ist A' die verlangte Gerade.

Ist s der Pol von A, so fällt A' auf A. Liegt s auf K, so wird A' die Tangente von K in s.

4. Aufgabe. Es sind zwei conjungirt imaginäre Punkte auf der reellen Geraden A gegeben; dieselben sollen aus dem Punkte a von K auf diesen projicirt werden d. h. die Gerade B soll bestimmt werden, welche K in diesen Punkten schneidet.

B ist offenbar Polare der Involution auf K, welche die Strahlenpaare von $\{a\}$, die die Involution $\{A\}$ projiciren, ausschneiden.

Lehrsatz 1. *Durch die von uns aufgestellte projektivische Beziehung der Gebilde wird jedem* $\left\{\begin{matrix} reellen \\ imaginären \end{matrix}\right\}$ *Elemente des einen Gebildes ein* $\left\{\begin{matrix} reelles \\ imaginäres \end{matrix}\right\}$ *Element des anderen Gebildes entsprechen. Sind zwei Elemente des ersten Gebildes conjungirt imaginär, so sind die ihnen entsprechenden im anderen Gebilde ebenfalls conjungirt imaginär.*

Der erste Theil des Satzes ist daraus evident, dass jedes Element aus seinem entsprechenden durch Projiciren und Schneiden hervorgeht, welche Operationen nur reelle Elemente liefern, sobald eines in der Reihe reell ist.

Um den zweiten Theil zu beweisen, denken wir uns zwei projektivische Punktreihen K, K' auf demselben Kegelschnitte, deren Vervollständigungsaxe T sei und in denen a, a' ein Paar reeller einander entsprechender Punkte sind. Sei nun A eine willkürliche Gerade der Ebene, welche K in zwei conjungirt imaginären Punkten schneidet. Projicirt man diese aus a' auf T und die so erhaltenen conjungirt imaginären Punkte von T auf K' aus dem Punkte a, so erhält man eine Gerade B', welche offenbar die Punkte aus K' ausschneidet, welche den beiden Punkten, die A ausschneidet, in der projektivischen Beziehung entsprechen, wenn man die auf A gelegenen Punkte zu K rechnet. Projicirt man aber die Punkte, in denen A schneidet, aus a auf T und diese aus a' auf K, so erhält man die ihnen entsprechenden Punkte, wenn sie zu K' gerechnet werden, auf einer zweiten Geraden B. Zu Folge der 4ten Aufgabe schneiden sowol B als B' den Kegelschnitt je in zwei conjungirt imaginären Punkten.

Man könnte auch eine Projektivität aufstellen, in welcher die im Lehrsatze ausgedrückten Eigenschaften nicht auftreten und die nicht wesentlich von der von uns betrachteten verschieden ist, doch ist dieses für unsere Zwecke nicht erforderlich.

Folgerung. In zwei collinearen ebenen Systemen entsprechen den $\left\{\begin{matrix}\text{reellen}\\\text{imaginären}\end{matrix}\right\}$ Gebilden des einen Systems $\left\{\begin{matrix}\text{reelle}\\\text{imaginäre}\end{matrix}\right\}$ Gebilde des anderen Systems. Sind zwei Gebilde des einen Systems conjungirt imaginär, so sind auch die ihnen entsprechenden Gebilde conjungirt imaginär.

Anmerkung. In der elliptischen Involution gibt es kein Paar, dessen Elemente conjungirt imaginär wären, in der hyperbolischen gibt es unendlich viele Paare, deren Elemente conjungirt imaginär sind. Denkt man sich die Involution auf einem Kegelschnitte, so liegt für die elliptische der Pol innerhalb, also schneidet jede reelle Gerade durch ihn ein reelles Paar der Involution aus. Für die hyperbolische liegt aber der Pol p ausserhalb des Kegelschnittes K und jede durch p gehende Gerade, deren Pol innerhalb K liegt, schneidet K in zwei conjungirt imaginären Punkten, die ein Paar der Involution sind. Denn ist A eine durch p gehende Gerade, welche K in einem Paare imaginärer Punkte schneidet und ist $a\,a'$ ein reelles Paar der Involution, so zeigt die Lösung der 2ten Aufgabe, dass die Strahleninvolutionen, welche aus a und a', die imaginären Schnittpunkte von A projiciren, die Polare P von p in derselben Involution schneiden, dass also die auf A liegenden Punkte ein Paar der Involution auf K sind (4. Folgerung zu Lehrsatz 2, § 6, Kap. III, Seite 61).

§ 4. Das Polarsystem.

Ist ein Kegelschnitt K gegeben, so entspricht jeder Gederen $\mathfrak{P}$ der Ebene ein Punkt $\mathfrak{p}$ als Pol und umgekehrt. Die Gesammtheit der einander so zugeordneten Punkte und Geraden der Ebene nennt man ein *Polarsystem.*

Die Punkte, welche auf den ihnen zugeordneten Geraden liegen, sind die Punkte von K, und die Geraden, welche durch die ihnen zugehörigen Punkte gehen, hüllen K ein. In dieser Auffassung heisst K der *Ordnungskegelschnitt des Polarsystems.*

Die wesentliche Eigenschaft des Polarsystems ist in folgendem Satze enthalten:

Jedem Punkte x der Ebene entspricht eine Gerade X und

jeder Geraden Y ein Punkt y. Beschreibt X den Strahlenbüschel (y), so beschreibt x ein zum Strahlenbüschel (y) projektivisches gerades Gebilde auf X, welches zu dem Schnitte von (y) mit X involutorische Lage hat.

Lehrsatz 1. *Das Polarsystem ist bestimmt, wenn zwei conjugirte Polaren* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ *von K bekannt sind und die Involutionen* $\{\mathfrak{P}\}$, $\{\mathfrak{Q}\}$ *conjugirter Pole auf denselben bestimmt sind.* D. h. man kann dann zu jeder Geraden X den Pol x für K bestimmen, ohne Punkte des Kegelschnittes K selbst zu benützen.

Fig. 51. Denn ist $\mathfrak{r}$ der Schnittpunkt der conjugirten Polaren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ resp. $\mathfrak{p}$ seine conjugirten auf diesen, so ist $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ offenbar ein Tripel conjugirter Punkte.

Schneidet nun die Gerade X die $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{Q}$ in l und m und sind λ und μ die ihnen conjugirten Pole in $\{\mathfrak{P}\}$ resp. $\{\mathfrak{Q}\}$, so ist $\overline{\mathfrak{p}\lambda}$ Polare von l und $\overline{\mathfrak{q}\mu}$ Polare von m in Bezug auf K, also ist der Schnittpunkt x dieser Geraden der Pol von X für K. Es ist klar, wie man, wenn x gegeben ist, die Polare X findet. Diese Construktionen sind mit Rücksicht auf den Desargue'schen Satz Kap. I, Lehrsatz 3, § 3, Seite 16 mit dem Lineal allein durchführbar.

Da nun $\overline{\mathfrak{r}x}$ Polare des Punktes n wird, in dem X die

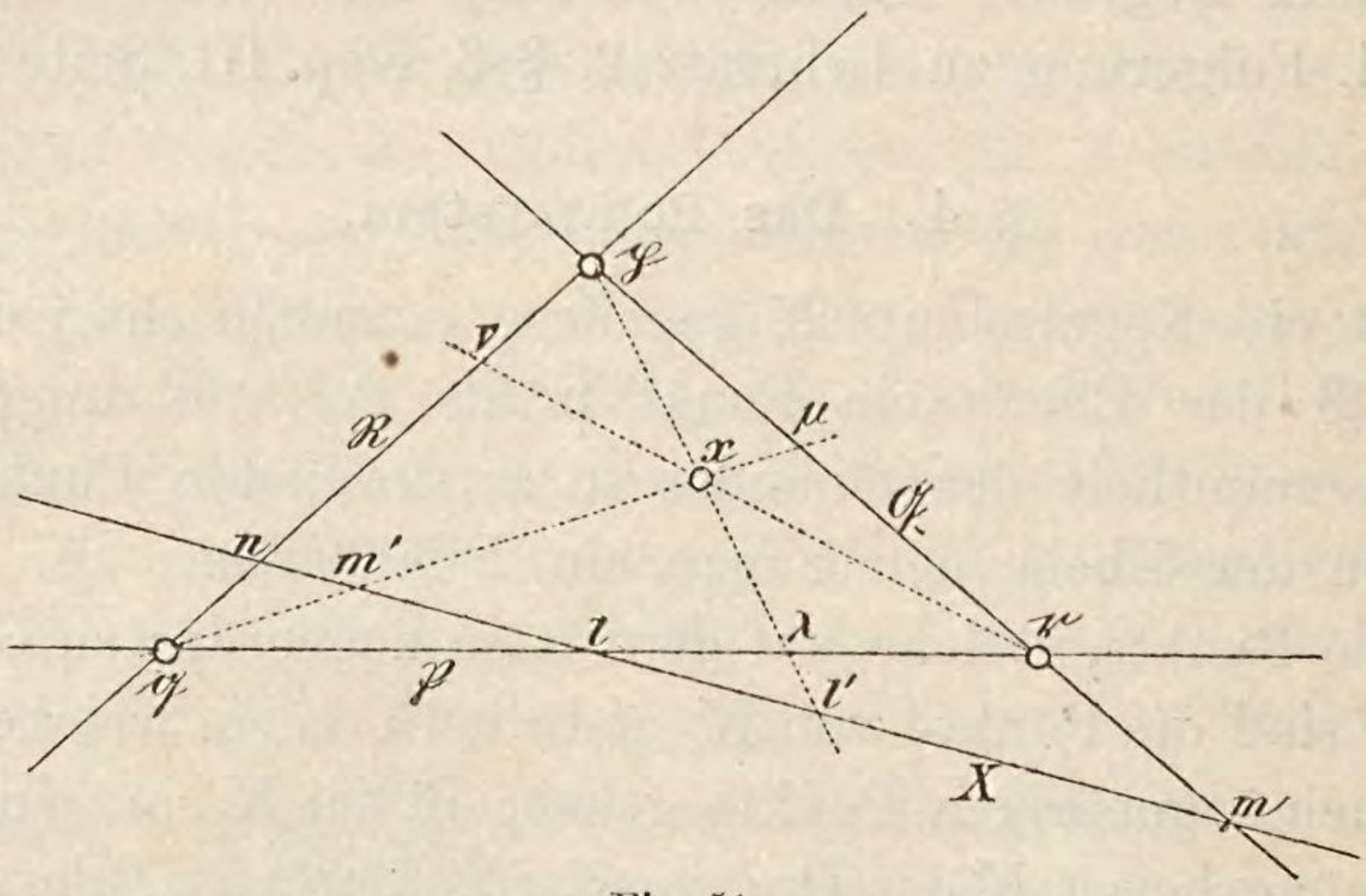


Fig. 51.

Gerade $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}}$ schneidet, so ist der Schnittpunkt ν von $\overline{\mathfrak{r}x}$ mit $\mathfrak{R}$ zum Punkte n, conjugirt, und mithin ist die Involution con-

jugirter Pole $\{\mathfrak{R}\}$ durch die zwei Paare $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und $n\nu$ auch bestimmt.

Die drei Involutionen $\{\mathfrak{P}\}$, $\{\mathfrak{Q}\}$, $\{\mathfrak{R}\}$ haben die specielle Lage, dass drei Punkten l, m, n, die auf einer Geraden liegen, drei Punkte λ, μ, ν conjugirt sind, so dass $\overline{\mathfrak{p}\lambda}$, $\overline{\mathfrak{q}\mu}$, $\overline{\mathfrak{r}\nu}$ durch einen Punkt gehen.

Wir wollen drei Involutionen in solcher Lage als in *polarer* Lage befindlich bezeichnen, und dieses auch von den drei Strahleninvolutionen $\{\mathfrak{p}\}$, $\{\mathfrak{q}\}$, $\{\mathfrak{r}\}$ in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ sagen, die die Punktinvolutionen der gegenüberliegenden Seiten projiciren.

Was nun die Involution conjugirter Pole von K auf X anbelangt, so ist dieselbe durch die obige Construktion auch ohne Weiteres gegeben. Schneidet nämlich $\overline{\mathfrak{p}x}$ in l' und $\overline{\mathfrak{q}x}$ in m', so bestimmen ll' und mm' als zwei ihrer Paare dieselbe vollständig.

Da $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ ein Poldreieck von K ist, so müssen die Involutionen auf zweien der drei Geraden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ hyperbolisch und auf einer elliptisch sein (Kap. III, § 7, Lehrsatz 2). In der Figur sind $\{\mathfrak{P}\}$ und $\{\mathfrak{R}\}$ hyperbolisch und $\{\mathfrak{Q}\}$ elliptisch. Sind g, h die Deckpunkte von $\{\mathfrak{P}\}$ und i, k die von $\{\mathfrak{R}\}$, so sind dieses vier Punkte von K, und $\overline{\mathfrak{p}g}$, $\overline{\mathfrak{p}h}$, $\overline{\mathfrak{r}i}$, $\overline{\mathfrak{r}k}$ sind Tangenten von K.

Nun war die Construktion von Pol und Polare, sobald die Involutionen auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bekannt waren, ganz unabhängig davon, ob eine der Involutionen hyperbolisch war; wir behalten daher die Construktion und die Benennungen bei, auch dann, wenn beide Involutionen auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ elliptisch sind. Es kann dann offenbar kein Kegelschnitt existiren, für den $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ conjugirte Polaren und die Paare der Involutionen auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ conjugirte Pole wären. Wir wollen aber zeigen, dass trotzdem die Eingangs ausgesprochenen Fundamentaleigenschaften des Polarsystems bestehen bleiben.

Seien die Involutionen $\{\mathfrak{P}\}$, $\{\mathfrak{Q}\}$ auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ge- Fig. 52.
geben und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die Punkte, welche dem Schnittpunkte $\mathfrak{r}$ beider Geraden zugeordnet sind; wir construiren zu der Geraden X den Pol x als Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{q}\mu}$ und $\overline{\mathfrak{p}\lambda}$, wenn μ und λ die entsprechenden Punkte zu den Schnittpunkten m und l

von X mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ sind. Hiernach entspricht jeder Geraden X ein Pol x und jedem Punkte y eine Polare Y. Den Geraden durch $\mathfrak{p}$ entsprechen Punkte auf $\mathfrak{P}$, welche mit den Schnittpunkten der ersteren die Involution $\{\mathfrak{P}\}$ bilden. Analog für $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{Q}$. Der Geraden $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ entspricht der Punkt $\mathfrak{r}$.

Beschreibt X den Strahlenbüschel (y), so beschreibt x ein zum Strahlenbüschel projektivisches gerades Gebilde auf der Polare Y von y. Denn hierbei beschreiben l, m auf $\mathfrak{P}$

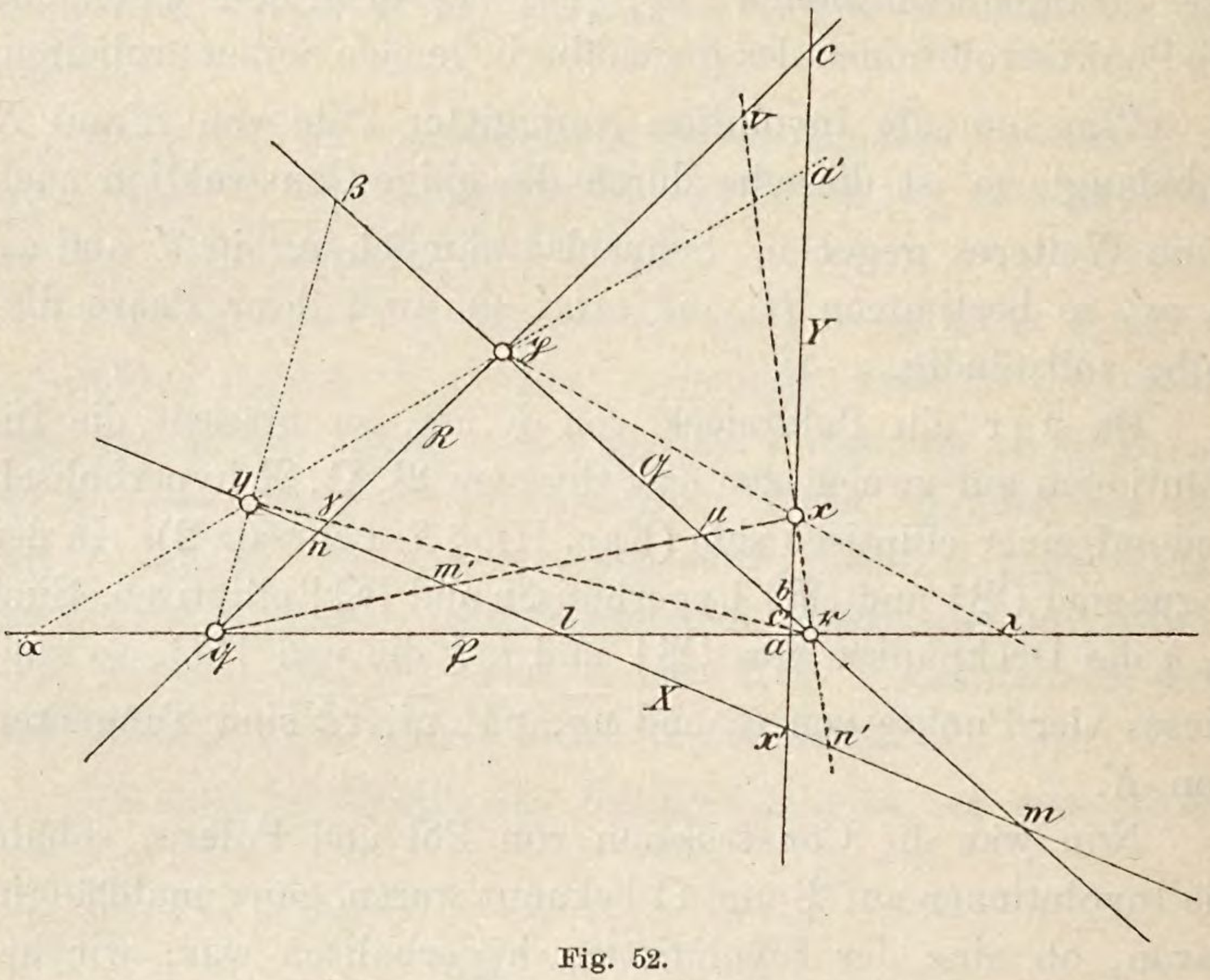


Fig. 52.

und $\mathfrak{Q}$ projektivische Punktreihen, also sind die Büschel $\mathfrak{p}(\lambda)$ und $\mathfrak{q}(\mu)$ projektivisch. Sie liegen perspektivisch, da für den Strahl $\overline{y\mathfrak{r}}$ die Punkte l und m in $\mathfrak{r}$ liegen, und daher λ nach $\mathfrak{q}$ und μ nach $\mathfrak{p}$ fällt, also $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ ein sich selbst entsprechender Strahl ist.

Da dem Strahle $\overline{y\mathfrak{p}}$ der Punkt a von $\mathfrak{P}$ entspricht, welcher dem Schnittpunkte α von $\overline{y\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{P}$ conjugirt ist, und ebenso dem Strahle $\overline{y\mathfrak{q}}$, der $\mathfrak{Q}$ in β schneidet, der Punkt b entspricht, so geht Y durch a und b und ist die Polare von y.

Bezeichnet man den Schnittpunkt von X und Y mit x', so beschreiben x und x' auf X zwei projektivische Punkt-

reihen, die aber involutorisch liegen, da a und a', der Schnittpunkt von $\overline{y\mathfrak{p}}$ mit X, einander involutorisch entsprechen.

Wir behalten für x, x' die Bezeichnung conjugirte Pole auf Y bei, und sehen so, dass auf jeder Geraden Y der Ebene eine Involution conjugirter Pole auftritt, die aus dem Pole y durch die Involution conjugirter Polaren projicirt wird. Mit dem Früheren zusammengehalten folgt also, dass $\mathfrak{p}$ der Pol von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{q}$ der Pol von $\mathfrak{Q}$ ist, und dass den Strahlen durch $\mathfrak{r}$ die Punkte von $\mathfrak{R}$ als Pole zugehören. Schneidet $\mathfrak{R}$ die Y in c und $\overline{y\mathfrak{r}}$ in γ, so ist c der Pol von $\overline{\mathfrak{r}y}$, also $c\,\gamma$ ein Paar der Involution conjugirter Pole auf $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$ ist ein zweites Paar.

Die drei Involutionen auf $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sind offenbar in *polarer* Lage und $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ ist ein Poldreieck, in dem jede Seite Polare der gegenüberliegenden Ecke ist.

Sei nun $x\,y\,z$ ein construirtes Poldreieck, so dass also x der Pol von $X = \overline{yz}$, y der Pol von $Y = \overline{xz}$ und z der Pol von $\overline{xy} = Z$ ist; so werden in den auf X, Y, Z auftretenden Involutionen je zwei Ecken des Dreieckes ein Paar sein, und dieselben werden wieder in polarer Lage sich befinden; denn die Polaren der Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, in denen eine Gerade T die X, Y, Z schneidet, gehen durch den Pol t von T, sind also die Geraden $\overline{tx}$, $\overline{ty}$, $\overline{tz}$ und schneiden X, Y, Z in den drei Punkten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, die mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ je ein Paar der Involution conjugirter Pole bilden.

Hieraus folgt aber, dass an Stelle des ursprünglichen Poldreieckes $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ irgend ein anderes gewählt werden kann, mit den Involutionen, die auf seinen Seiten bestimmt wurden, und dass dann ebenso dasselbe Polarsystem construirt werden kann, wie mittels des ersten Poldreieckes. Dieses Poldreieck ist also in keiner Weise vor den übrigen ausgezeichnet.

Das construirte Polarsystem kann auf *keiner* Geraden der Ebene eine *hyperbolische* Involution besitzen, da wir bereits sahen, dass ein Kegelschnitt nicht existiren kann, welchem ein solches Polarsystem zugehört. Wir wollen aber sagen das Polarsystem habe einen *imaginären Ordnungskegelschnitt*,

welcher alle die imaginären Deckpunkte der auf den Geraden der Ebene auftretenden Involution conjugirter Pole enthält, und der von den imaginären Deckstrahlen der Involutionen conjugirter Polaren der Punkte der Ebene eingehüllt wird.

Wir werden in der Folge diesen imaginären Kegelschnitt, dessen Polarsystem vollständig reell ist*), berücksichtigen, und ihn durch sein Polarsystem bestimmt ansehen. Wir werden die Sätze und Aufgaben so formuliren resp. lösen, dass von der Realität des Kegelschnittes abgesehen werden kann, sobald nur sein Polarsystem reell ist.

Für die Bestimmung eines Polarsystems erhalten wir folgende Sätze:

Ein Polarsystem ist bestimmt, wenn gegeben sind:

1) Ein Paar conjugirter Polaren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und die Involutionen conjugirter Pole auf denselben. Die vorstehende Auseinandersetzung zeigte die Construktion von Pol und Polare aus diesen Bestimmungsstücken.

2) Ein Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und die Involutionen $\{\mathfrak{p}\}$, $\{\mathfrak{q}\}$ conjugirter Polaren in diesen. Entspricht dem Strahle $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} = \mathfrak{R}$ in $(\mathfrak{p})$ der Strahl $\mathfrak{Q}$ und in $(\mathfrak{q})$ der Strahl $\mathfrak{P}$, so braucht man nur auf $\mathfrak{P}$ die Involution anzunehmen, welche $\{\mathfrak{p}\}$ darauf ausschneidet und auf $\mathfrak{Q}$ die, welche $\{\mathfrak{q}\}$ daselbst ausschneidet, um die Bestimmtheit des Polarsystems nach 1) zu erkennen.

3) Ein Poldreieck und ein Punkt a nebst seiner Polare A. Werden die Seiten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ des Poldreieckes $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ von A in l, m, n geschnitten und sind die Projektionen von a aus $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ auf dieselben λ, μ, ν, so wird das Polarsystem durch die Involutionen auf $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, deren Paare $\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}$, $l\,\lambda$ resp. $\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$, $m\,\mu$ sind, nach 1) bestimmt sein, und a zum Pol von A haben.

4) Ein Poldreieck und die Involution conjugirter Pole auf einer Geraden A. Schneidet A die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in l, m, und entsprechen diesen in der Involution auf A die Punkte l' und m', so mögen sich sich $\overline{\mathfrak{p}\,l}$, und $\overline{\mathfrak{q}\,m'}$ in a schneiden.

---

*) Es gibt noch andere imaginäre Kegeschnitte, deren Polarsysteme aber nicht mehr reell sind, indem einem reellen Punkte eine imaginäre Polare zugehört.

Das Polarsystem ist dann nach 3) bestimmt, wenn a als Pol der Geraden A zugewiesen wird.

5) Ein Poldreieck und die Involution conjugirter Polaren $\{a\}$ in einem Punkte a der Ebene. Entspricht dem Strahle $\overline{ap}$ resp. $\overline{aq}$ von $\{a\}$ der Strahl $\overline{al}$ resp. $\overline{am}$, welche $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{Q}$ in l und m schneiden, so ist das Polarsystem nach 3) bestimmt, wenn man dem Punkte a die Gerade $\overline{lm} = A$ als Polare zuordnet.

Ist eine der Involutionen des Polarsystems hyperbolisch, so ist der Ordnungskegelschnitt reell und seine Punkte können nach den §§ 8 und 2 leicht construirt werden.

Es genügt übrigens zu wissen, dass eine Gerade A des Polarsystems mit ihrer conjugirten A' zusammenfällt, oder dass ein Punkt mit seinem conjugirten coïncidirt, um zu zeigen, dass der Ordnungskegelschnitt reell sein muss. Denn ist b irgend ein Punkt von A und B seine Polare, so muss sie A in dem Pol a von A schneiden, da dieser auf $A' = A$ liegt. Daher ist a ein Deckpunkt der Involution auf B, diese hat mithin noch einen a'. Der Pol x jeder Geraden X durch a liegt dann notwendig auf A als der Polare von a, und daher liegt auf X noch ein Punkt des Kegelschnittes.

Lehrsatz 1. *Schneiden die Strahlen eines Büschels (a) die Gerade B in den Punkten x und bestimmt man auf den Strahlen $\overline{ax}$ die Punkte ξ, welche zu x im Polarsystem conjugirt sind, so ist der Ort der Punkte ξ ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch a und b, den Pol von B, geht, und auf B und A, der Polare von a, dieselbe Involution conjugirter Pole besitzt, die diesen Geraden im Polarsystem zugehören. Der Schnittpunkt c der Geraden A und B ist der Pol der Geraden $\overline{ab} = C$ für $\mathfrak{K}$. Derselbe Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ wird erhalten, wenn b an Stelle von a und gleichzeitig A an Stelle von B genommen wird.*

Der Punkt ξ ist der Schnittpunkt der Polare von x mit $\overline{ax}$, also liegt ξ auf dem Erzeugnisse der projektivischen Büschel $a(x)$ und $b(\xi)$, wenn $\overline{b\xi}$ die Polare von x ist, also b der Pol von B. Fig. 53.

Schneidet $\overline{b\xi}$ die Polare A von a in y, so ist $\overline{ax}$ Polare

von y, also ξ conjugirt zu y im Polarsystem, mithin wird derselbe $\mathfrak{K}$ erhalten mittels b und A.

Da dem Strahle $\overline{ab}$ von (a) die Polare $\overline{bc}$ entspricht, so ist $\overline{bc}$ Tangente von $\mathfrak{K}$ in b, ebenso ist $\overline{ac}$ Tangente in a. Es geht mithin $\overline{ab}$ durch den Pol von B sowol als von A in Bezug

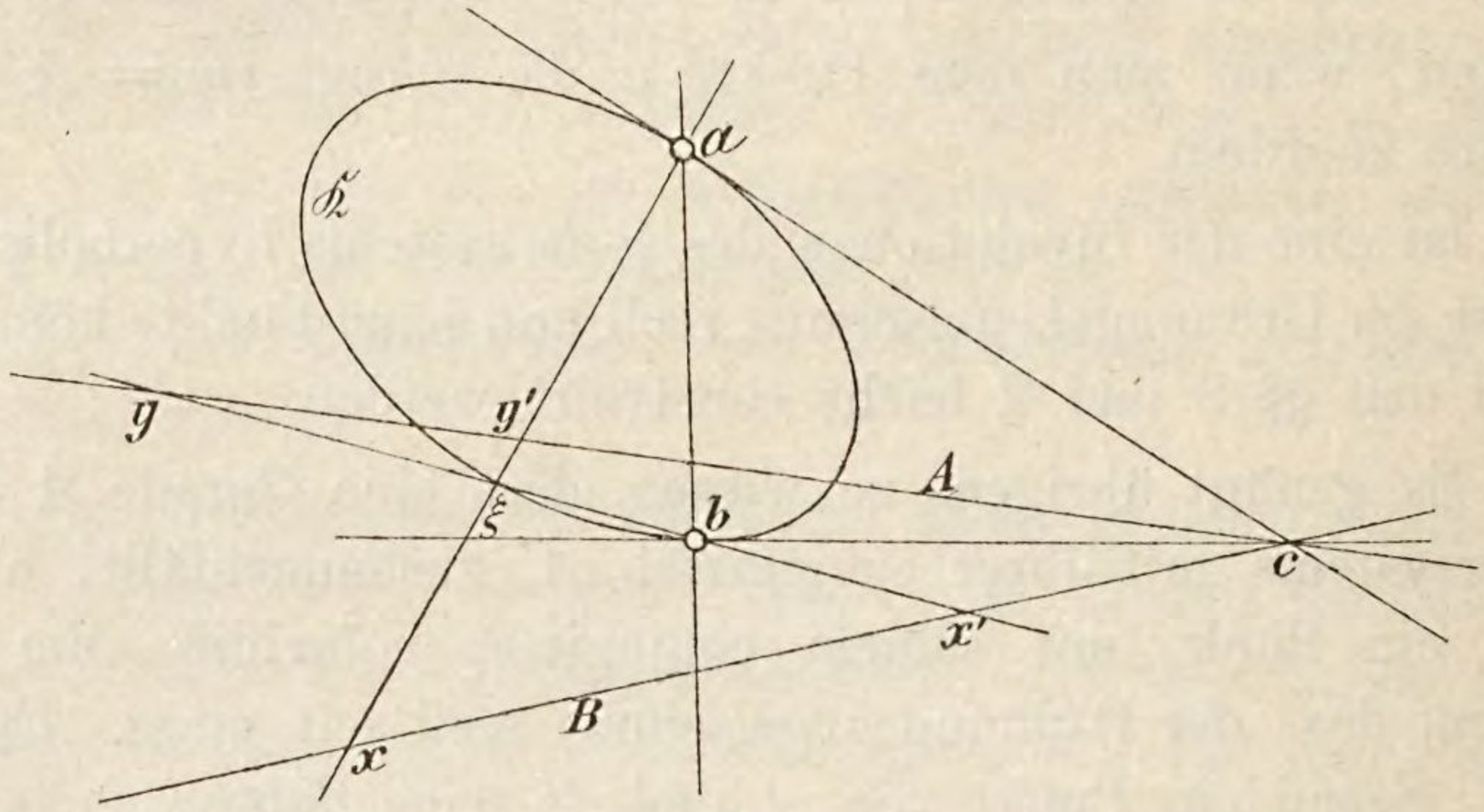


Fig. 53.

auf $\mathfrak{K}$, und es schneiden daher nach der 3. Folgerung zum Lehrsatze 2 des § 6, Kap. III, p. 61 die Geraden $a\xi$ und $b\xi$ auf beiden Geraden A und B Punktepaare der Involution conjugirter Pole von $\mathfrak{K}$ aus. Daher sind x, x' auf B conjugirt in Bezug auf $\mathfrak{K}$, da aber $\overline{b\xi}$ Polare von x im Polarsystem ist, so sind x, x' auch in diesem conjugirt.

Durch irgend zwei Punkte a, b der Ebene geht immer ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, derselbe hat den Pol c von $\overline{ab}$ zum Pol und auf den Polaren A und B von a und b dieselbe Involution conjugirter Pole, wie das Polarsystem, wodurch der Kegelschnitt mehr als bestimmt, aber doch möglich ist.

Folgerung. Ein Polarsystem ist bestimmt, wenn auf drei Geraden L, M, N, die durch einen Punkt a gehen, drei Involutionen conjugirter Pole $\{L\}$, $\{M\}$, $\{N\}$ gegeben sind, die so beschaffen sind, dass die drei dem Punkte a conjugirten Pole auf L, M, N in einer Geraden A liegen.

Fig. 54. Denn sei B irgend eine Gerade der Ebene, welche L, M, N in l, m, n schneidet, und seien diesen Punkten λ, μ, ν

conjugirt, so construire man den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch λ, μ, ν, a geht und in a die Tangente $\overline{ac}$ besitzt, c der Schnittpunkt von A mit B. Ist dann C die Polare von c für $\mathfrak{K}$, welche ihn noch in b schneidet, so möge $\overline{b\lambda}$ die A

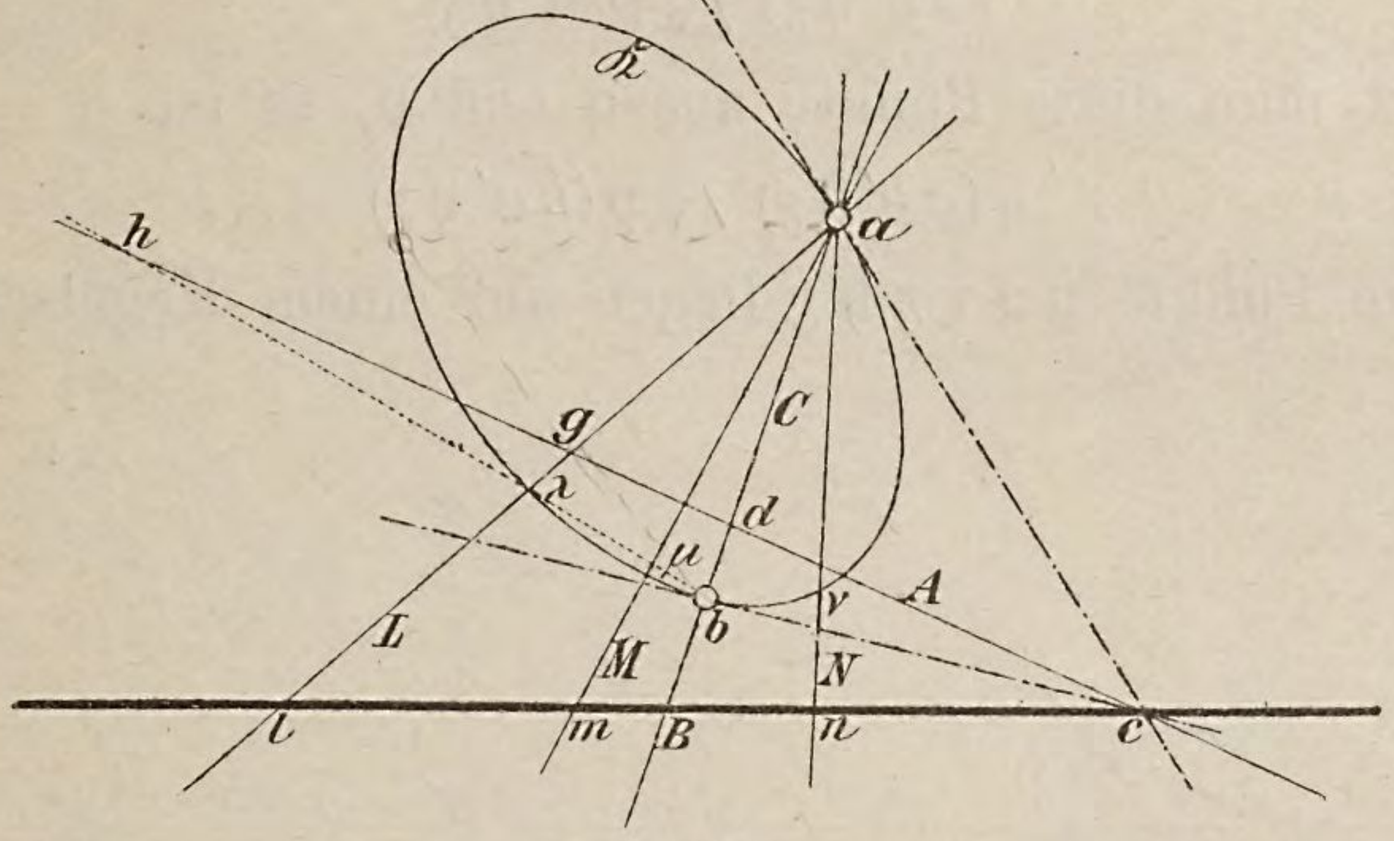


Fig. 54.

in h schneiden. Bezeichnet man den Schnittpunkt von L und A mit g, so sind g, h conjugirte Pole auf A für $\mathfrak{K}$, ebenso c und der Schnittpunkt d von C mit A.

Es ist nun ein Polarsystem bestimmt, für welches agh ein Poldreieck und b der Pol von B ist (siehe oben 3). In diesem wird durch die Punkte a, b ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ bestimmt sein, der c zum Pol von $\overline{ab}$ [denn c ist der Schnittpunkt von B mit $A = \overline{gh}$] besitzt und auf A die Involution hat, deren zwei Paare gh und dc sind. Dieser $\mathfrak{K}'$ ist mit dem oben construirten $\mathfrak{K}$ identisch, also sind in dem Polarsysteme $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$ conjugirte Pole und a ist Polare von A, welche Gerade L, M, N in den drei zu a conjugirten Punkten schneidet. Dieses Polarsystem hat also thatsächlich auf L, M, N die gegebenen Polinvolutionen $\{L\}$, $\{M\}$, $\{N\}$ und ist vollständig bestimmt, wie seine Construktion zeigt, denn für jedes mögliche Polarsystem müsste agh ein Poldreieck und b der Pol von B sein.

Lehrsatz 2. *Die Ecken zweier Poldreiecke desselben Polarsystems liegen auf einem Kegelschnitte.*

Ist $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ das eine, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ das andere Poldreieck, und schneiden Fig. 55.
$\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{x}}$ und $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{x}}$ die $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ in a' und b', so sind diese Punkte con-

jugirt zu den Schnittpunkten a und b von $\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}$ mit $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{x}}$ resp. $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$. Da also $\mathfrak{z}\mathfrak{y}$, aa', bb' drei Paare einer Involution sind, so ist

$$(a\,b'\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}) \barwedge (a'\,b\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{y}),$$

mithin nach Kap. I, § 3, Seite 15 auch

$$(a\,b'\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}) \barwedge (b\,a'\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}).$$

Projicirt man diese Punkte aus $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$, so ist

$$\mathfrak{q}\,(a\,b'\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}) \barwedge \mathfrak{p}\,(b\,a'\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$$

d. h. die Punkte $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ liegen auf einem Kegelschnitte.

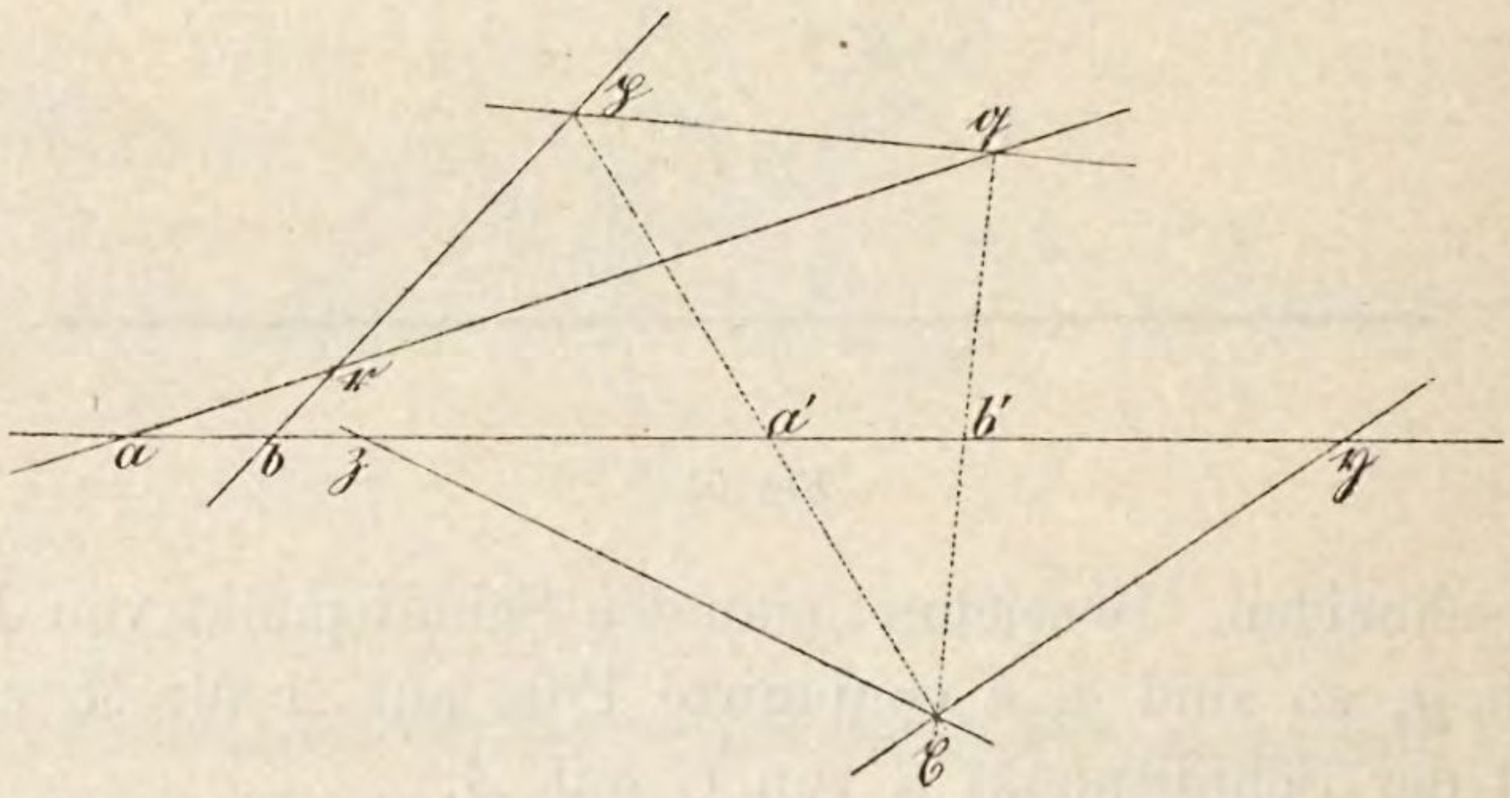


Fig. 55.

Zusatz. Enthält ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein Poldreieck des Polarsystemes, so enthält er unendlich viele, jeder Punkt p ist Ecke eines solchen, seine Polare P schneidet den $\mathfrak{K}$ in den zwei übrigen Punkten q, r. Ein solcher Kegelschnitt möge *Polkegelschnitt* des Polarsystems heissen.

§ 5. Polarfiguren.

Ist das Polarsystem des Ordnungskegelschnittes K gegeben, gleichgiltig ob K reell oder imaginär ist, so entspricht jedem Punkte $\mathfrak{a}$ der Ebene die Polare A und umgekehrt. Allgemein wird die Beziehung zweier ebenen Systeme, durch welche den Punkten und Geraden des einen die Geraden und Punkte des anderen zugewiesen werden, als eine *reciproke* bezeichnet. Die polare Beziehung ist eine *projektivische reciproke* Beziehung zweier ebenen Systeme derselben Ebene. Denn beschreibt $\mathfrak{a}$ ein gerades Gebilde X, so durchläuft A einen zum geraden Gebilde projektivischen Strahlenbüschel (x).

Folgerung 1. Die Polarfigur eines Kegelschnittes K ist wieder ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und die Polarfiguren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$ von a und A, welche Pol und Polare von K sind, sind Polare und Pol von $\mathfrak{K}$. Den Punkten und Tangenten von K entsprechen die Tangenten und Punkte von $\mathfrak{K}$. Wird nämlich K durch die projektivischen Büschel $(a) \barwedge (b)$ erzeugt, so ist $\mathfrak{K}$ die Enveloppe der Geraden, welche homologe Punkte der geraden Gebilde $|\mathfrak{A}| \barwedge |\mathfrak{B}|$ verbinden.

2. Jeder Satz über Beziehung projektivischer Gebilde geht in einen richtigen Satz über, wenn man im ersteren an Stelle von Punkt und Gerade, Gerade und Punkt setzt. Man nennt diese Regel, welche dazu dient aus einem Satze einen zweiten abzuleiten, das *Gesetz der Reciprocität* und die Sätze selbst heissen einander *dual gegenüberstehende Sätze.*

So z. B. geht der Pascal'sche Satz in Kap. III, § 4, Seite 53 in den dualen Satz über:

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ *sechs Tangenten eines Kegelschnittes und schneiden einander* $\mathfrak{AB}$ *in* 1, $\mathfrak{BC}$ *in* 2, $\mathfrak{CD}$ *in* 3, $\mathfrak{DE}$ *in* 4, $\mathfrak{EF}$ *in* 5 *und* $\mathfrak{FA}$ *in* 6, *so gehen die drei Geraden, welche die drei Paare gegenüberliegender Ecken mit einander verbinden, nämlich:* $\overline{14}$, $\overline{25}$, $\overline{36}$ *durch einen Punkt* (Brianchon'scher Satz).

Weitere Beispiele aus dem Vorangehenden anzuführen dürfte überflüssig sein, in der Folge werden noch einzelne besonders hervorgehoben werden.

§ 6. Classification der Kegelschnitte.

Die Kegelschnitte werden, nach ihrem Verhalten der unendlich fernen Geraden M_∞ gegenüber, eingetheilt in zwei Classen:

I. Der Pol m von M_∞ für den Kegelschnitt liegt im Endlichen.

II. Der Pol m liegt auf M_∞.

I. Da für jede Gerade G, welche durch m geht, dieser Punkt Mittelpunkt der Polinvolution auf G ist, so wird m selbst *Mittelpunkt* des Kegelschnittes genannt. Schneidet G den K in reellen Punkten, so haben diese von m gleichen Abstand (Kap. I, § 3, Seite 21).

Die Strahlen durch m werden *Durchmesser* des Kegel-

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

schnittes genannt. Sind G und $\mathfrak{G}$ ein Paar der Polareninvolution von m, so heissen G, $\mathfrak{G}$ *ein Paar conjugirter Durchmesser* von K. Die Mittelpunkte der Polinvolutionen auf den zu G parallelen Geraden liegen auf $\mathfrak{G}$ und umgekehrt. Schneidet G in reellen Punkten, so sind die Tangenten in denselben parallel zu $\mathfrak{G}$. Die Geraden G, $\mathfrak{G}$, M_∞ bilden ein Poldreieck von K. (Folgt unmittelbar aus den Sätzen der §§ 5, 6, 7 des Kap. III.)

Das Rechtwinkelpaar $A\mathfrak{A}$ der Involution in m heisst *Axen* des Kegelschnittes.

Man unterscheidet nun die beiden Fälle ob die Polareninvolution in m

a) *elliptisch*,

b) *hyperbolisch*

ist.

a) Ist die Involution conjugirter Durchmesser elliptisch, so wird der Kegelschnitt *Ellipse* genannt.

Ist ein Punkt desselben reell, so ist der Kegelschnitt reell, und jeder Durchmesser muss in zwei reellen Punkten schneiden, die auf demselben eine Strecke begränzen, deren Mitte m ist. Die reelle Ellipse umschliesst also den Mittelpunkt und verläuft ganz im Endlichen.

Schneidet *ein* Durchmesser den Kegelschnitt *nicht* in reellen Punkten, so *kann kein reeller Punkt des Kegelschnittes existiren*, derselbe ist imaginär.

Wir wollen unter Ellipse immer den reellen Kegelschnitt verstehen.

Ist speciell die Involution in m *circular*, so ist der Kegelschnitt ein Kreis (Kap. IV, § 1, Anmerkung auf Seite 72). Derselbe kann imaginär oder reell sein.

b) Ist die Involution conjugirter Durchmesser hyperbolisch, so wird der Kegelschnitt *Hyperbel* genannt. Die Hyperbel schneidet also M_∞ in zwei reellen Punkten, deren Tangenten durch m gehen und *Asymptoten* der Hyperbel heissen. Sie sind die Deckstrahlen der Involution conjugirter Durchmesser G, $\mathfrak{G}$, und trennen daher diese harmonisch. Schneidet G die Hyperbel in reellen Punkten, so sind die Schnittpunkte auf $\mathfrak{G}$ conjungirt imaginär. Die Axen halbiren

die Winkel der Asymptoten. Eine derselben schneidet in reellen Punkten und heisst *reelle Axe*, die andere heisst *imaginäre Axe*. Die Hyperbel verläuft ganz in den Scheitelwinkelräumen, in welchen die reelle Axe liegt.

Stehen die Asymptoten auf einander senkrecht, so heisst die Hyperbel *gleichseitig*.

II. Liegt der Pol m_∞ von M_∞ auf M_∞ selbst, so berührt der Kegelschnitt die M_∞, und er heisst *Parabel*. Man kann m_∞ auch als Mittelpunkt des Kegelschnittes auffassen. Die Involution conjugirter Durchmesser wird dann parabolisch, indem jedem Durchmesser M_∞ conjugirt ist, Kap. III, § 6, Seite 59. Die Mittelpunkte aller Polinvolutionen, die auf einer Schaar paralleler Geraden auftreten, liegen auf einem *Durchmesser* der Parabel, welcher conjugirt zur Richtung der Schaar heisst. Derselbe schneidet nur in einem im Endlichen gelegenen Punkte die Parabel. Der Durchmesser, welcher senkrecht zu seiner conjugirten Richtung ist, heisst *Axe* der Parabel. Die Axe ist die Polare der Richtung, welche senkrecht ist zur Richtung m_∞.

1. Aufgabe. Es ist ein Kreis $\mathfrak{K}$ durch centrale Collineation so abzubilden, dass die Collinearfigur $\mathfrak{K}'$ eine a) Ellipse, b) Hyperbel, c) Parabel wird. Nimmt man die Collineationsaxe C und das Centrum c, sowie den Kreis $\mathfrak{K}$ willkürlich an, Fig. 56. so hat man nur die Gegenlinie V so zu wählen, dass sie

a) den Kreis $\mathfrak{K}$ nicht schneidet, wie V_a,

b) den Kreis $\mathfrak{K}$ in zwei getrennten Punkten schneidet, wie V_b,

c) den Kreis $\mathfrak{K}$ in einem Punkte berührt, wie V_c.

Denn V'_∞ wird die unendlich ferne Gerade der Ebene E', also $\mathfrak{K}'$ von der verlangten Art.

2. Aufgabe. Es ist ein Kegelschnitt K gegeben; man bilde ihn durch centrale Collineation so ab, dass die Collinearfigur K' eine a) Ellipse, b) Hyperbel, c) Parabel wird.

3. Aufgabe. Es ist ein Kegelschnitt K gegeben durch drei Punkte x, y, z und die Tangenten X, Y in zweien derselben; man bestimme seinen Mittelpunkt m, die Involution conjugirter Polaren in m, sowie die Axen A, $\mathfrak{A}$ und die Asymptoten, wenn dieselben reell sind.

Anmerkung. Die Polarfigur eines Kegelschnittes K in Bezug auf die Basis K ist eine Ellipse, Hyperbel, Parabel, je nachdem der Mittelpunkt von K innerhalb, ausserhalb, auf dem Kegelschnitte K liegt.

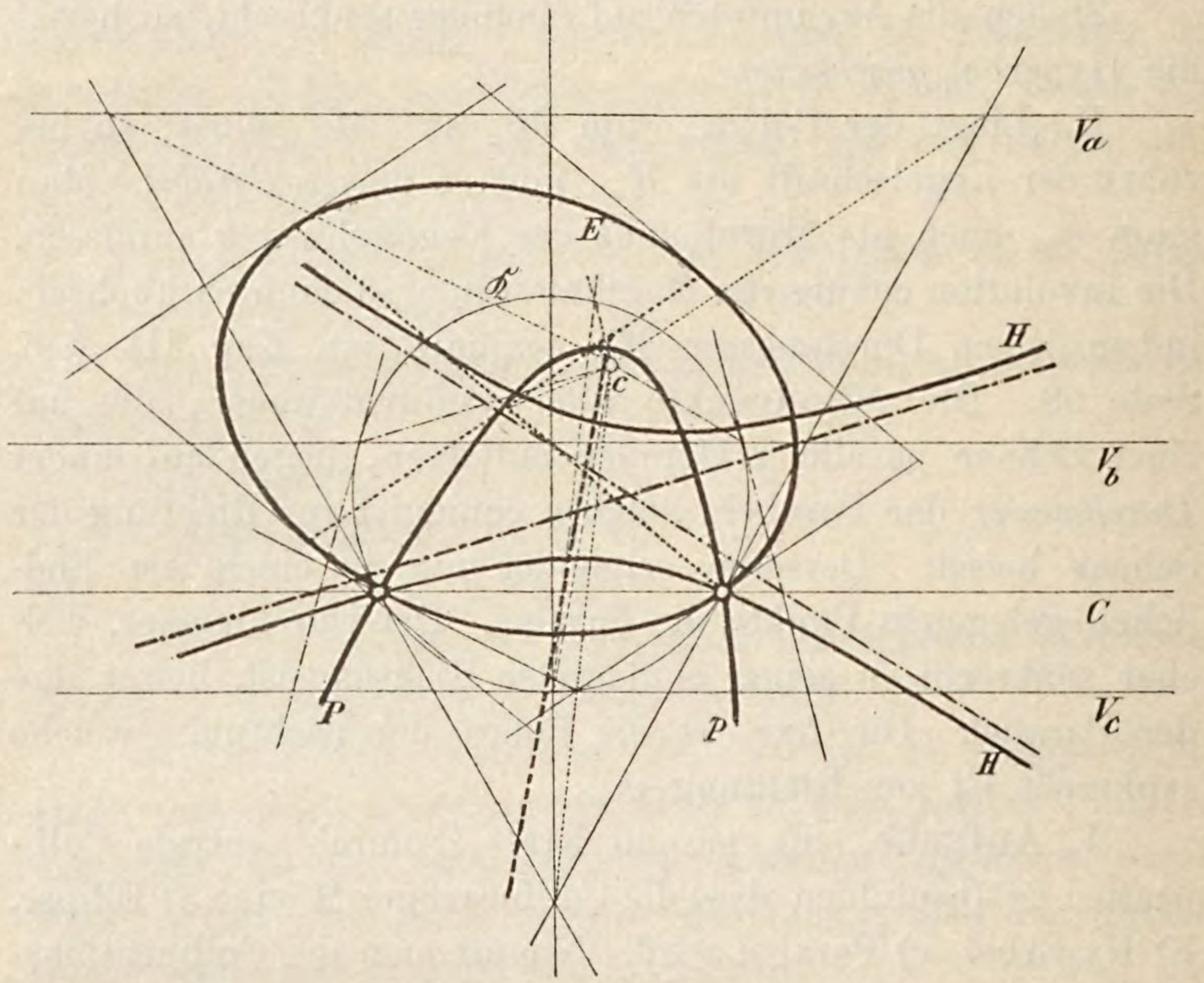


Fig. 56.

§ 7. Die Reciprocität.

Definition. Sind zwei ebene Systeme derart auf einander bezogen, dass den Punkten und Geraden des einen die Geraden und Punkte des anderen entsprechen, so sagt man die Ebenen sind in *reciproker Beziehung*. Entspricht hiebei jedem geraden Gebilde $|P|$ von E ein zu ihm *projektivischer* Strahlenbüschel ($\mathfrak{p}$) von $\mathfrak{E}$, so wird die Beziehung eine *projektivisch reciproke* genannt.

In § 5 wurde die Beziehung zwischen Pol und Polare eines Kegelschnittes als eine reciproke projektivische erkannt.

Lehrsatz 1. *Entspricht jedem Punkte p und der durch ihn gehenden Geraden P von E eine Gerade* $\mathfrak{P}$ *und ein auf ihr liegender Punkt* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{E}$, *so stehen E und* $\mathfrak{E}$ *in reciproker projektivischer Beziehung.*

Nimmt man in $\mathfrak{E}$ einen beliebigen Kegelschnitt K an, und ist $\mathfrak{p}'$ der Pol von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ Polare von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf K, so steht das ebene System $\mathfrak{E}'$ zu E in collinearer Beziehung. (Kap. II. § 2, Lehrsatz 1.)

Daher wird dem geraden Gebilde $|P|$ ein zu ihm projektivisches gerades Gebilde $|\mathfrak{P}'|$ entsprechen und diesem in Bezug auf K ein projektivischer Stralenbüschel $(\mathfrak{p})$, also ist auch $|P| \barwedge (\mathfrak{p})$.

Lehrsatz 2. *Eine reciproke projektivische Beziehung zweier ebenen Systeme ist bestimmt, wenn man vier Punkten a, b, c, d von E, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, vier Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ zuweist, von denen keine drei durch einen Punkt gehen.*

Sind $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die Pole von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt K, und bezieht man E auf $\mathfrak{E}'$ so collinear, dass a, b, c, d zu entsprechenden haben $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}''$, so wird das polare System $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{E}'$ auf E reciprok bezogen sein.

Lehrsatz 3. *Ist das ebene System $\mathfrak{E}$ projektivisch reciprok zu E' und E, so sind E, E' collinear.*

Der Geraden $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{E}$ entsprechen die Punkte p und p' in E und E' und diese bestimmen die collineare Beziehung, indem jeder Geraden P durch p eine Gerade P' durch p' entspricht. (Kap. II, § 2, Lehrsatz 1.)

Liegen die beiden reciproken ebenen Systeme $E, \mathfrak{E}$ in einer Ebene, so kann jeder Punkt und jede Gerade einmal zu dem einen, das anderemal zu dem anderen System gehörig aufgefasst werden.

Geht die dem Punkte p entsprechende Gerade $\mathfrak{P}$ durch p, so muss auch die dem Punkte p, als $\mathfrak{p}$ aufgefasst, entsprechende Gerade P durch $\mathfrak{p} = p$ gehen. Denn da $\mathfrak{p}$ ein Punkt von $\mathfrak{P}$ ist, so muss die ihm entsprechende Gerade P durch p gehen. Entspricht analog einer Geraden P ein Punkt $\mathfrak{p}$, der auf P liegt, so entspricht der Geraden $\mathfrak{P} = P$ ein Punkt p, der auch auf $P = \mathfrak{P}$ liegt.

Geht daher die dem Punkte p entsprechende Gerade $\mathfrak{P}$ *nicht* durch p, so geht die dem Punkte $\mathfrak{p} = p$ entsprechende Gerade P auch *nicht* durch p, und liegt der der Geraden P

entsprechende Punkt $\mathfrak{p}$ nicht auf P, so liegt auch der der Geraden $\mathfrak{P} = P$ entsprechende Punkt p nicht auf $\mathfrak{P}$.

Lehrsatz 4. *Entsprechen der Geraden $P = \mathfrak{P}$ die Punkte p und $\mathfrak{p}$, so bestimmen p, $\mathfrak{p}$ eine collineare Beziehung der Ebene, in welcher homologe Gerade G, $\mathfrak{G}$ solche sind, die demselben Punkte $\mathfrak{g} = g$ entsprechen.*

Denn durchläuft p ein gerades Gebilde G, so beschreibt $\mathfrak{p}$ ein dazu projektivisches gerades Gebilde $\mathfrak{G}$, während $\mathfrak{P} = P$ sich um den Punkt $\mathfrak{g} = g$ dreht.

Anmerkung. Entsprechen den vier Geraden $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, die vier Punkte $\mathfrak{a} = a$, $\mathfrak{b} = b$, $\mathfrak{c} = c$, $\mathfrak{d} = d$, so entspricht jeder Geraden $G = \mathfrak{G}$ ein und derselbe Punkt $\mathfrak{g} = g$, und jedem Punkte $p = \mathfrak{p}$ dieselbe Gerade $\mathfrak{P} = P$. Denn die obige Collineation muss eine Identität der ebenen Systeme werden. Ein specieller Fall einer solchen Reciprocität ist das Polarsystem.

Fig. 57.

Lehrsatz 5. *Entsprechen dem Punkte $p = \mathfrak{p}$ die Geraden $\mathfrak{P}$ und P, welche sich in $\mathfrak{p}' = p'$ schneiden, so sei die Gerade $\overline{pp'} = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$ mit $A = \mathfrak{A}$ bezeichnet, und $\mathfrak{a}$ resp. a seien die ihr entsprechenden Punkte. Durchläuft der Punkt $x = \mathfrak{x}$ das gerade Gebilde $|A| = |\mathfrak{A}|$, so beschreiben die entsprechenden Strahlen $\mathfrak{X}$ und X die Strahlenbüschel $(\mathfrak{a}) \barwedge (a)$, welche zu $A = \mathfrak{A}$ perspektivisch liegen. Ist $x' = \mathfrak{x}'$ der Schnittpunkt von X und $\mathfrak{X}$, so bilden die Paare $(x\mathfrak{x}') = (\mathfrak{x}x')$ auf $A = \mathfrak{A}$ eine Involution $\{A\} = \{\mathfrak{A}\}$.*

Lehrsatz 5′. *Entsprechen der Geraden $Q = \mathfrak{Q}$ die Punkte $\mathfrak{q}$ und q, so sei ihre Verbindungsgerade $\overline{\mathfrak{q}q}$ mit $Q' = \mathfrak{Q}'$ bezeichnet, welche $Q = \mathfrak{Q}$ in $b = \mathfrak{b}$ schneiden möge und $\mathfrak{B}$ resp. B seien die diesem Punkte entsprechenden Geraden. Durchläuft der Strahl $Y = \mathfrak{Y}$ den Büschel $(b) = (\mathfrak{b})$, so beschreiben die entsprechenden Punkte $\mathfrak{y}$ und y die zwei geraden Gebilde $|\mathfrak{B}| \barwedge |B|$, welche zu $b = \mathfrak{b}$ perspektivisch liegen. Ist $Y' = \mathfrak{Y}'$ die Gerade $\overline{\mathfrak{y}y}$, so bilden die Paare $(Y\mathfrak{Y}') = (\mathfrak{Y}Y')$ in $(b) = (\mathfrak{b})$ die Strahleninvolution $\{b\} = \{\mathfrak{b}\}$.*

Dem Schnittpunkte p' von P und A entspricht die Gerade $\mathfrak{P}' = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{a}}$ und dem Schnittpunkte $\mathfrak{p}' = p'$ von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$

entspricht die Gerade $P' = \overline{pa}$. Durchläuft daher $x = \mathfrak{x}$ das Gebilde $|A| = |\mathfrak{A}|$, so beschreiben $\overline{ax}$ und $\mathfrak{X}$ zwei projektivische Strahlenbüschel (a) resp. $(\mathfrak{a})$, in denen P', $\mathfrak{P}$ und und P, $\mathfrak{P}'$ zwei Paare homologer Strahlen sind.

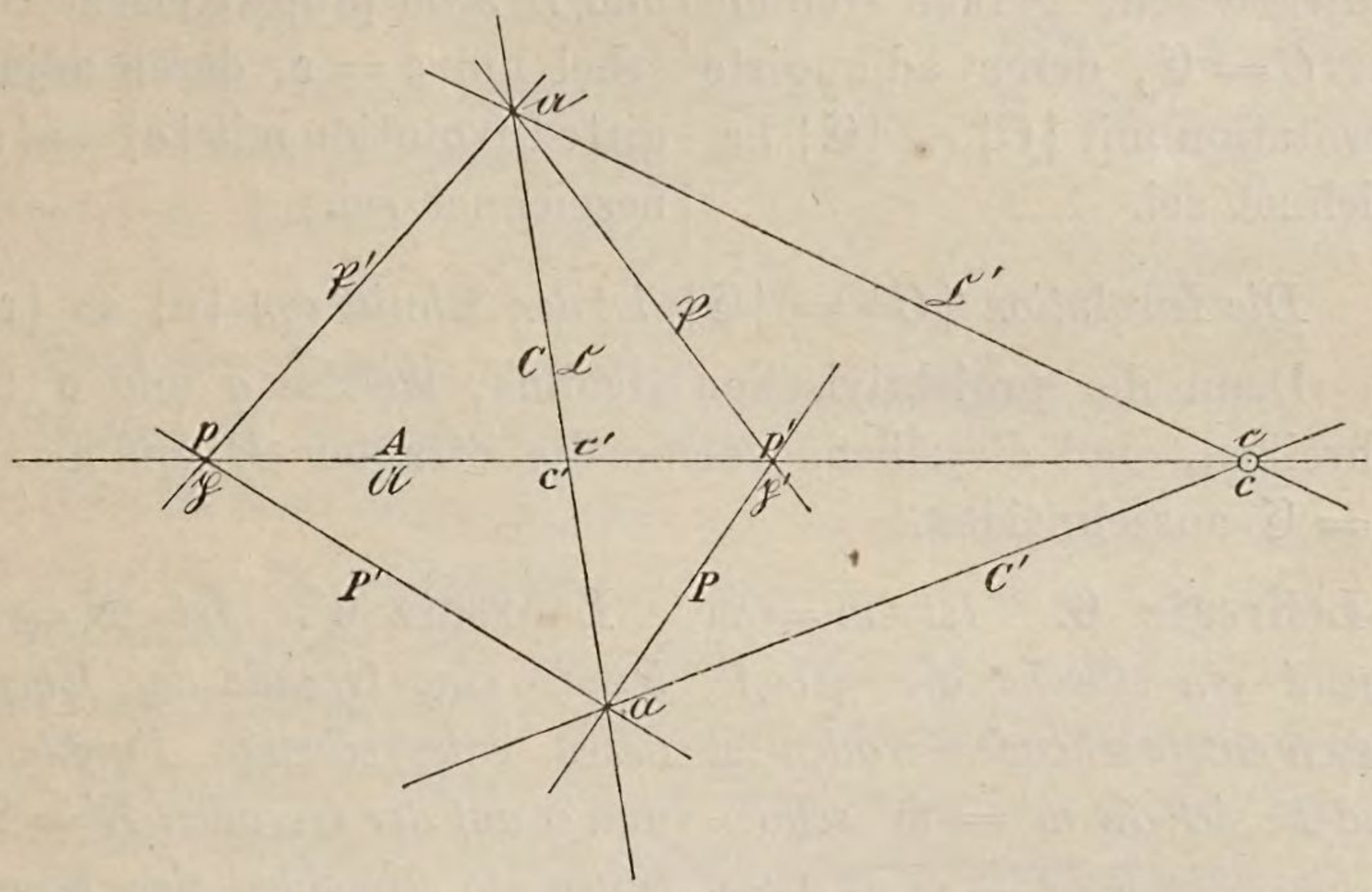


Fig. 57.

Entspricht dem Strahle $a\mathfrak{a} = C = \mathfrak{C}$ in den Büscheln (a) und $(\mathfrak{a})$ der Strahl C' resp. $\mathfrak{C}'$, so liegt der Schnittpunkt $c = \mathfrak{c}$ von C' und $\mathfrak{C}'$ auf $A = \mathfrak{A}$ (Kap. I, § 2, Zusatz zur Aufgabe 2, Seite 13) und entspricht mithin der Geraden $\mathfrak{C} = C$, welche $A = \mathfrak{A}$ in dem Punkte $c' = \mathfrak{c}'$ schneidet, der $\mathfrak{C}'$ resp. C' zugeordnet ist. Durchläuft nun $x = \mathfrak{x}$ das gerade Gebilde $|A| = |\mathfrak{A}|$, so werden die Schnittpunkte $\mathfrak{x}'$ von $\mathfrak{X}$ und x' von X auf $A = \mathfrak{A}$ zwei projektivische gerade Gebilde beschreiben, die in $p' = \mathfrak{p}'$, $p = \mathfrak{p}$, $c = \mathfrak{c}$ drei Deckpunkte besitzen, also identisch sind. Da in der projektivischen Beziehung zwischen dem von x und $\mathfrak{x}'$ durchlaufenen geraden Gebilde $p = \mathfrak{p}$ und $p' = \mathfrak{p}'$ sich involutorisch entsprechen, so sind $x\mathfrak{x}'$ Paare einer Involution. In dieser Involution entspricht $c = \mathfrak{c}$ dem Schnittpunkte $c' = \mathfrak{c}'$ von $C = \mathfrak{C}$ mit $A = \mathfrak{A}$.

Der Satz rechts folgt aus der dualen Betrachtung und es entspricht ebenso dem Strahle $\overline{bc}$ die Gerade $C = \mathfrak{C}$ in der Involution $\{b\} = \{\mathfrak{b}\}$.

Zusatz.

Beschreibt der Strahl $A = \mathfrak{A}$ den Strahlenbüschel $(c) = (\mathfrak{c})$, so durchlaufen $\mathfrak{a}$ und a zwei projektivische gerade Gebilde auf $C = \mathfrak{C}$, deren adjungirte Involution mit $\{C\} = \{\mathfrak{C}\}$ bezeichnet sei.

Durchläuft der Punkt $b = \mathfrak{b}$ das gerade Gebilde $|C| = |\mathfrak{C}|$, so beschreiben die Strahlen $\mathfrak{B}$ und B zwei projektivische Büschel um $c = \mathfrak{c}$, deren adjungirte Involution mit $\{c\} = \{\mathfrak{c}\}$ bezeichnet sei.

Die Involution $\{C\} = \{\mathfrak{C}\}$ ist der Schnitt von $\{c\} = \{\mathfrak{c}\}$.

Denn die projektivischen Gebilde, welche a und $\mathfrak{a}$ beschreiben, sind dieselben, welche die Strahlen B und $\mathfrak{B}$ auf $C = \mathfrak{C}$ ausschneiden.

Lehrsatz 6. *Ist $m = \mathfrak{m}$ irgend ein Punkt der Ebene, dessen entsprechende Geraden $\mathfrak{M}$ und M sich in $m' = \mathfrak{m}'$ schneiden, so geht $\overline{m\,m'} = \overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'}$ durch $c = \mathfrak{c}$.*

Lehrsatz 6′. *Ist $N = \mathfrak{N}$ irgend eine Gerade der Ebene, deren entsprechende Punkte $\mathfrak{n}$ und n auf der Geraden $N' = \mathfrak{N}'$ liegen, so schneiden sich N und N' auf $C = \mathfrak{C}$.*

Denn verbindet man $m = \mathfrak{m}$ mit $c = \mathfrak{c}$ und bezeichnet diese Gerade mit $A = \mathfrak{A}$, so liegen die ihr entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$ und a auf $C = \mathfrak{C}$, und daher liegt auch $m' = \mathfrak{m}'$ auf $A = \mathfrak{A}$.

Lehrsatz 7. *Durchläuft der Punkt $m = \mathfrak{m}$ irgend eine Gerade $G = \mathfrak{G}$, so durchläuft der Schnittpunkt $m' = \mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{M}$ und M einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch $c = \mathfrak{c}$ geht und auf $C = \mathfrak{C}$ die Polinvolution $\{C\} = \{\mathfrak{C}\}$ besitzt.*

Lehrsatz 7′. *Beschreibt die Gerade $N = \mathfrak{N}$ einen Strahlenbüschel $(h) = (\mathfrak{h})$, so hüllt die Gerade $N' = \mathfrak{N}'$, welche $\mathfrak{n}$ und n verbindet, einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ ein, welcher auch $C = \mathfrak{C}$ berührt und in $c = \mathfrak{c}$ die Polareninvolution $\{c\} = \{\mathfrak{c}\}$ besitzt.*

Die Geraden $\mathfrak{M}$ und M beschreiben um $\mathfrak{g}$ und g zwei projektivische Büschel, in denen $\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{c}}$ und $\overline{g\,c}$ homologe Strahlen sind. Da $\overline{m\,m'} = \overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'}$ stets durch $c = \mathfrak{c}$ geht, so schneiden die Strahlen $\overline{g\,m'} = M$ und $\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{m}'} = \mathfrak{M}$ die Gerade $C = \mathfrak{C}$ in den beiden Punkten, welche $\overline{m\,m'} = \overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'}$ entsprechen, daher

hat $\mathfrak{K}$ auf $C = \mathfrak{C}$ die Polinvolution $\{C\} = \{\mathfrak{C}\}$ (Kapitel IV, § 2, Aufgabe 1, Seite 76).

Lehrsatz 8. *Die Involutionen auf den Strahlen durch $c = \mathfrak{c}$ liegen in einem Polarsysteme K, für welches c und C Pol und Polare, $\{c\}$ und $\{C\}$ Polaren- resp. Polinvolution sind.*

Lehrsatz 8′. *Die Strahleninvolutionen in den Punkten von $C = \mathfrak{C}$ liegen in einem Polarsysteme K', für welches C und c Polare und Pol, $\{C\}$ und $\{c\}$ Pol- resp. Polareninvolutionen sind.*

Ist $\mathfrak{K}$ der $G = \mathfrak{G}$ nach Lehrsatz 7 entsprechende Kegelschnitt und A_1, A_2, A_3 irgend drei durch $c = \mathfrak{c}$ gehende Gerade, welche $G = \mathfrak{G}$ in m_1, m_2, m_3, $C = \mathfrak{C}$ in c_1', c_2', c_3' und $\mathfrak{K}$ in m_1', m_2', m_3' schneiden, so sind cc_i', $m_i m_i'$ je zwei Paare der Involution $\{A_i\}$ auf A_i. Nach Kap. IV, § 4, Folgerung zu Lehrsatz 1, Seite 94 ist durch die drei Involutionen $\{A_1\}$, $\{A_2\}$, $\{A_3\}$ ein Polarsystem K bestimmt. In diesem entspricht der Geraden G der obige Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und auf allen Strahlen durch c bestimmt $\mathfrak{K}$ und G ein Paar der Involution, c und der Schnittpunkt von C ist ein zweites Paar. Für K ist c und C Pol und Polare, und K hat auf C dieselbe Involution wie $\mathfrak{K}$.

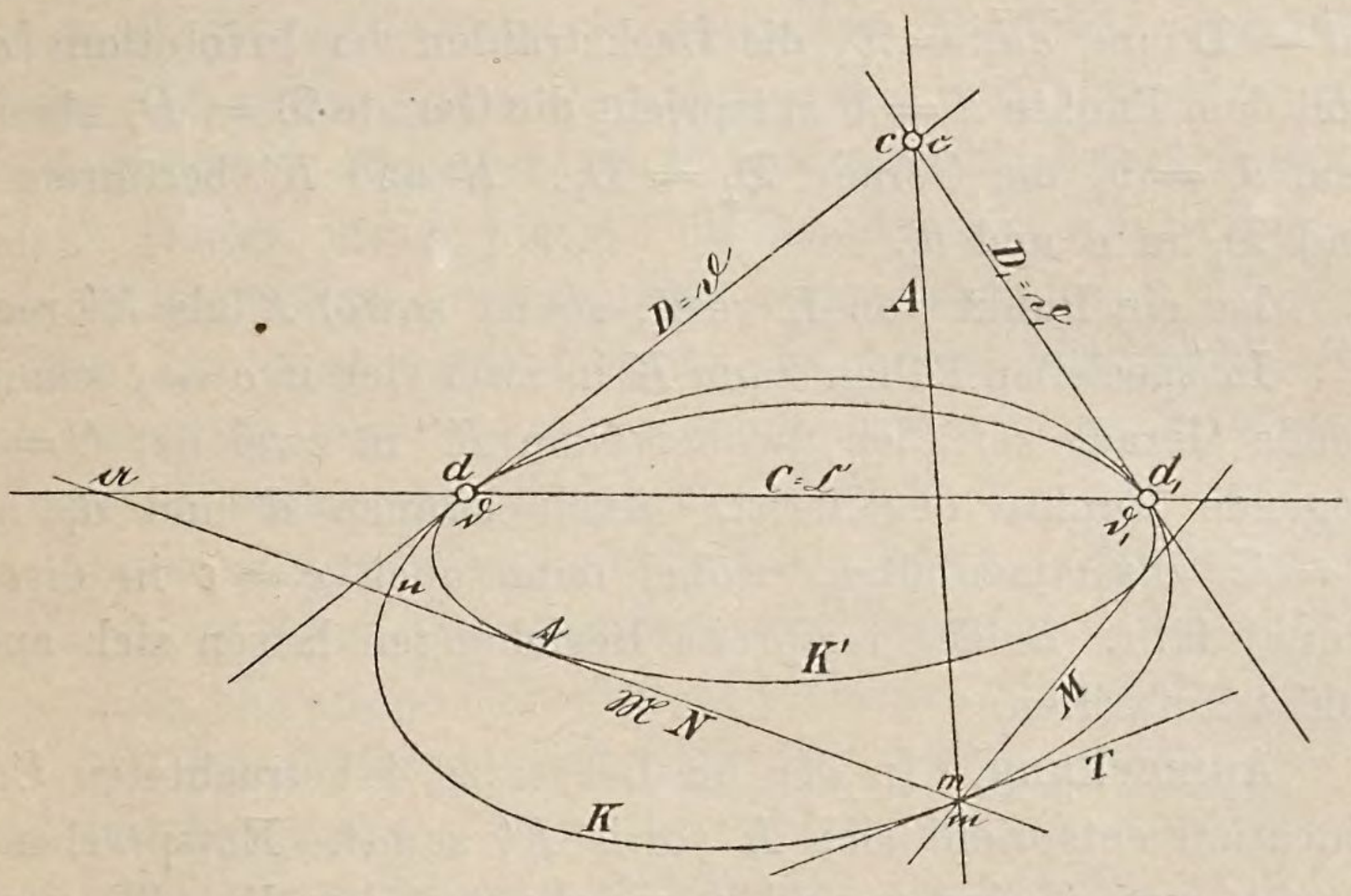


Fig. 58.

Sei m ein Punkt von K, also ein Deckpunkt der Involution $\{A\}$ auf $A = \overline{cm}$, so geht die Gerade $\mathfrak{M}$ durch m. Fig. 58.

Schneidet $\mathfrak{M}$ den K noch in dem Punkte $\mathfrak{n}$, so muss N sowol durch $\mathfrak{n}$ als m gehen, es ist also $N = \mathfrak{M}$ und die beiden Punkte $\mathfrak{n}$ und m liegen auf K. Da umgekehrt jeder Punkt m, welcher auf der ihm entsprechenden Geraden $\mathfrak{M}$ liegt, ein Punkt von K sein muss, *so ist K der Ort der Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen.*

Schneidet $N = \mathfrak{M}$ die $C = \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{a}$, so ist $N = \mathfrak{M}$ ein Deckstrahl der Involution $\{\mathfrak{a}\}$, denn die Gerade $\overline{\mathfrak{n}m}$ fällt mit $N = \mathfrak{M}$ zusammen, daher ist $N = \mathfrak{M}$ Tangente von K'.

Da jede Gerade N, welche durch den ihr entsprechenden Punkt $\mathfrak{n}$ geht, Tangente von K' ist, so folgt: *K' ist die Enveloppe der Geraden, welche durch den ihnen entsprechenden Punkt gehen.*

Durch den Punkt $m = \mathfrak{m}$ geht noch eine zweite Tangente M von K', und da dieses für jeden Punkt von K gilt, so liegt *K ganz ausserhalb K'.*

Der Tangente T von K in m entspricht der Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ von K' auf $\mathfrak{M}$; denn der Geraden, welche die Punkte m, m' von K verbindet, entspricht der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{M} \,.\, \mathfrak{M}'$.

Sind d, d_1 die Deckpunkte der Involution $\{C\}$, so sind $\overline{cd} = \mathfrak{D}$ und $\overline{cd_1} = \mathfrak{D}_1$ die Deckstrahlen der Involution $\{c\}$, und dem Punkte $d = \mathfrak{d}$ entspricht die Gerade $\mathfrak{D} = D$, ebenso dem $d_1 = \mathfrak{d}_1$ die Gerade $\mathfrak{D}_1 = D_1$. K und K' berühren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ in d und d_1.

Ist ein Punkt von K reell, so ist sowol K als K' reell.

In speciellen Fällen kann K in zwei sich in $c = \mathfrak{c}$ schneidende Gerade zerfallen, wobei dann K' in zwei auf $C = \mathfrak{C}$ liegende Punkte degenerirt. Auch können d und d_1 auf $C = \mathfrak{C}$ zusammenfallen, wobei dann auch $c = \mathfrak{c}$ in diesen Punkt fällt. Solche reciproke Beziehungen lassen sich auch leicht aufstellen.

Anmerkung. In der im Lehrsatze 4 betrachteten Collineation entspricht sich K sowie K' selbst. Entsprechende Punkte von K sind m und $\mathfrak{n}$, welche auf derselben Tangente $\mathfrak{M} = N$ von K' liegen. Die Vervollständigungsaxe der auf K liegenden projektivischen Punktreihen m, $\mathfrak{m}$ ist $C = \mathfrak{C}$.

V. Kapitel.

Hauptpunkte einer Collineation. — Steiner'sche Verwandtschaft. — Schnittpunkte zweier Kegelschnitte. — Aufgaben.

§ 1. Die Hauptpunkte einer Collineation.

Hilfssatz. *Haben zwei Kegelschnitte* $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{K}'$ *einen Punkt* a *gemeinschaftlich, in dem sie sich nicht berühren, so haben sie noch einen anderen Punkt gemeinschaftlich.* Denn nach Kap. III, § 7, Folgerung 4, zu Lehrsatz 2, Seite 64 bildet der Kegelschnitt eine geschlossene Linie, also wird ein Punkt x, der von a aus in bestimmtem Sinne $\mathfrak{K}$ durchläuft, wieder nach a zurückkehren; da aber x bei a von dem einen Gebiete der Ebene, in welche sie durch $\mathfrak{K}'$ zerlegt wird, in das andere übertritt, so muss x wieder bei einem anderen Punkte p aus dem zweiten in das erste eintreten, damit er auf $\mathfrak{K}$ laufend nach a zurückkehren kann. Würde ausser p noch ein Schnittpunkt q auftreten, so müsste noch einer r vorhanden sein, denn bei q würde x wieder aus dem ersten Gebiete ins zweite übergehen, also müsste wieder ein Uebergang aus dem zweiten ins erste stattfinden. Würden sich die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ in p berühren, so müsste ebenfalls noch ein Schnittpunkt q auftreten, indem dann x bei p auf derselben Seite der Tangente von $\mathfrak{K}'$ bliebe, also auch das zweite Gebiet nicht verlassen würde. Es könnte speciell der Punkt q auch noch in p fallen, wobei dann $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ einander in p *osculiren.* $\mathfrak{K}$ berührt nicht blos $\mathfrak{K}'$, sondern tritt aus dem einen Gebiete ins andere über.

Es seien zwei collineare ebene Systeme in derselben Ebene gegeben. Liegen dieselben central, so deckt sich ein Strahlenbüschel (c) mit seinem homologen (c') und ein ge-

rades Gebilde C coïncidirt mit seinem entsprechenden C' (Kap. II, § 3, Seite 30). Wir wollen diesen Fall für das Folgende dieses Paragraphen ausschliessen. Wir haben dann in Kap. II, § 1, Folgerung zu Lehrsatz 3, Seite 27 gesehen, dass keine vier Punkte mit ihren homologen sich decken können. Wol kann aber stets eine Collineation aufgestellt werden, in der sich drei Punkte p, q, r, die nicht in einer Geraden liegen, mit ihren homologen p', q', r' decken, man kann dann noch einem Punkte a einen willkürlichen, von ihm verschiedenen Punkt a' zuweisen, wodurch die Collineation bestimmt ist.

Ein Punkt, der mit seinem homologen in der Collineation zusammenfällt, heisst *Hauptpunkt*, und eine Gerade, die sich mit ihrer entsprechenden deckt, *Hauptgerade der Collineation*. Wir beweisen den folgenden

Lehrsatz 1. *In zwei collinearen Systemen E, E' derselben Ebene existirt stets ein Hauptpunkt $p = p'$ und eine Hauptgerade $P = P'$.*

Fig. 59. Dem Punkte a' von E' möge a von E entsprechen. Die Büschel $(a') \barwedge (a)$ erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Entspricht

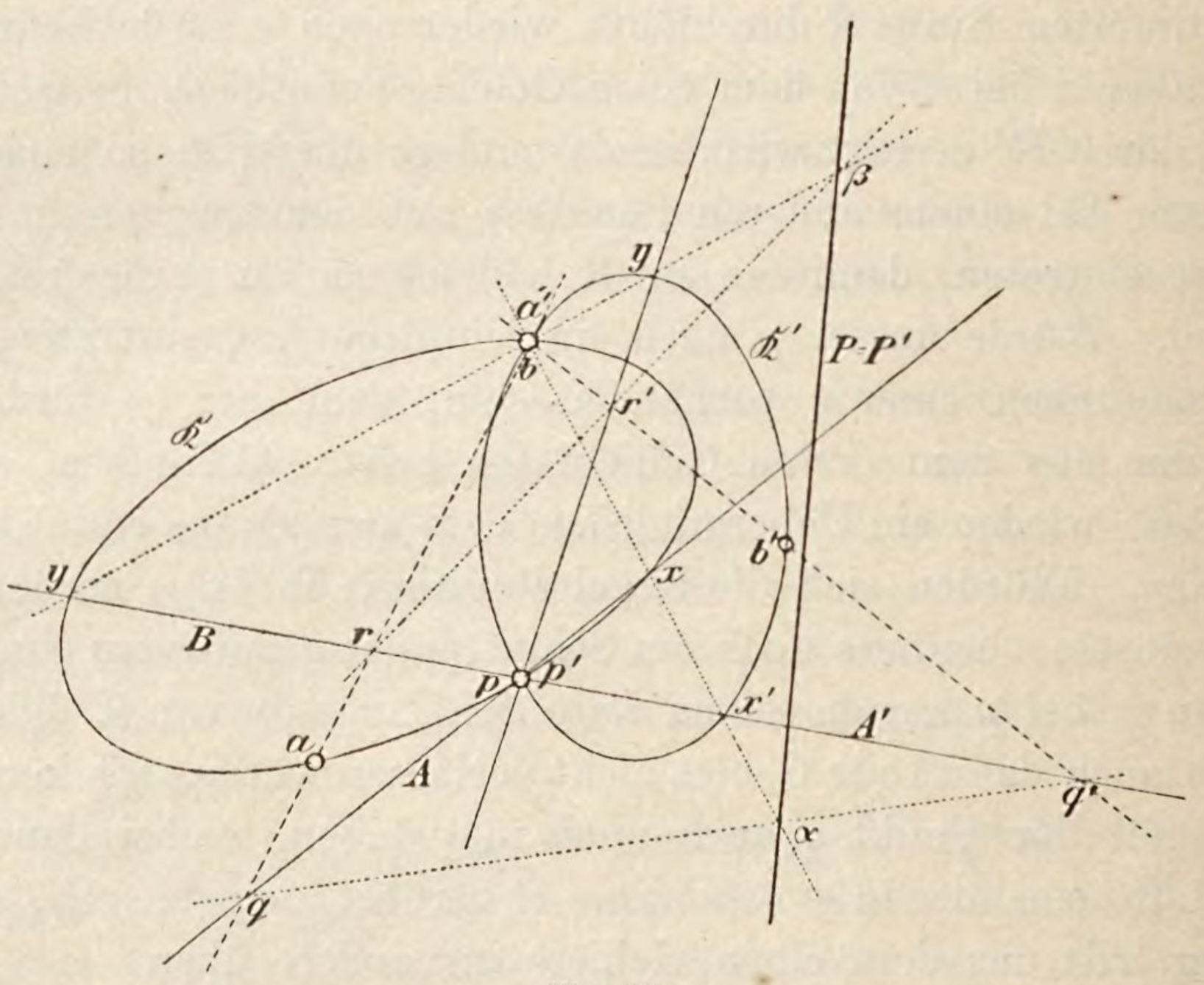


Fig. 59.

dann dem Punkte $a' = b$ zu E gerechnet der Punkt b', so erzeugen die Büschel $(b) \barwedge (b')$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, welcher

die Collinearfigur von $\mathfrak{K}$ ist, und zwar liegen homologe Punkte x, x' auf Strahlen durch den Punkt $a' = b$. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ nicht identisch sein können, und dass sie sich bei allgemeiner Wahl von $a' = b$ in diesem Punkte nicht berühren werden. Zu Folge des Hilfssatzes schneiden sie sich daher wenigstens noch in einem Punkte. Jeder dieser Schnittpunkte ist offenbar ein Hauptpunkt der Collineation. Schneiden sich die Kegelschnitte noch in drei Punkten p, q, r, so sind diese *drei Hauptpunkte* und die sie verbindenden Geraden sind *drei Hauptgeraden.*

Wir setzen voraus ein Schnittpunkt $p = p'$ sei construirt. Fig. 59. Der Geraden $\overline{px} = A$ wird die Gerade $\overline{p'x'} = A'$ entsprechen, und die geraden Gebilde $|A| \barwedge |A'|$ liegen perspektivisch, α sei ihr Perspektivitätscentrum. Entspricht ihm der Punkt α', so werden die Büschel $(\alpha) \barwedge (\alpha')$ offenbar zu dem geraden Gebilde $|A'|$ perspektivisch liegen, haben mithin einen Strahl $P = P'$ entsprechend gemein, welcher eine Hauptgerade der Collineation ist.

Je zwei homologe Strahlen B, B' durch $p = p'$ haben ihr Perspektivitätscentrum β auf $P = P'$. Denn geht P nicht durch $p = p'$, so schneidet es B und B' in einem Paare homologer Punkte. Geht aber $P = P'$ durch $p = p'$, so würde, wenn $\overline{\beta\alpha}$ nicht durch p ginge, diese Gerade eine Hauptgerade sein, denn schneidet sie A und B in m, n, so trifft sie A' und B' in m', n'; also fällt $\overline{mn}$ auf $\overline{m'n'}$.

Die Gerade $P = P'$ geht dann und nur dann durch $p = p'$, wenn sich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ daselbst berühren. Denn beschreibt A, also auch A', den Büschel $(p) \barwedge (p')$, so durchläuft α auf P ein zu diesen Büscheln projektivisches gerades Gebilde, welches zum Strahlenbüschel $a'(x') = b(x)$ perspektivisch liegt. Sind also die Tangenten T, T' von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in p nicht identisch, so kann ihr Perspektivitätscentrum τ auch nicht in p liegen, es geht also P nicht durch p. Das Centrum τ liegt im Schnittpunkte von $\overline{a'p}$ mit P. Geht aber P durch p, dann ist p Perspektivitätscentrum zweier Strahlen durch p, die in $P = P'$ coïncidiren müssen und die gemeinschaftliche Tangente von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ darstellen.

Wir wollen mit $p = p'$ den Punkt bezeichnen, in dem sich $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ schneiden oder osculiren, aber nicht einfach berühren. Dann geht $P = P'$ durch $p = p'$ nur dann, wenn sich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ daselbst osculiren.

Lehrsatz 2. *Alle Kegelschnitte* $\mathfrak{K}$, *welche durch irgend zwei homologe Büschel* $(a) \barwedge (a')$ *erzeugt werden, gehen durch den Hauptpunkt* $p = p'$ *und haben auf der Hauptgeraden* $P = P'$ *dieselbe Involution conjugirter Pole, welche die adjungirte Involution der auf* $P = P'$ *liegenden projektivischen geraden Gebilde ist.*

Da $\overline{ap}$ der homologe Strahl zu $\overline{a'p'}$ ist, so geht $\mathfrak{K}$ durch $p = p'$. Weil aber die Büschel $(a) \barwedge (a')$ auf $P = P'$ die einander projektivischen geraden Gebilde ausschneiden, so ist die diesen adjungirte Involution die Polinvolution von $\mathfrak{K}$ (Kap. IV, § 2, Aufgabe 1, Seite 76).

Hieraus folgt, dass kein weiterer Punkt $x = x'$ existiren kann, sobald er nicht auf P liegt. Denn dann müssten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ durch a', p, x gehen und auf $P = P'$ dieselbe Polinvolution haben, könnten also nach Kap. IV § 1 von einander nicht verschieden sein.

Geht $P = P'$ nicht durch $p = p'$ und ist die adjungirte Involution auf P:

1) hyperbolisch, q, r ihre Deckpunkte, so gehen alle $\mathfrak{K}$ durch p, q, r, und $P = \overline{qr}$, $Q = \overline{pr}$, $R = \overline{qp}$ sind drei Hauptgerade, p, q, r drei Hauptpunkte der Collineation;

2) elliptisch, so sind ihre Deckpunkte q, r conjungirt imaginär und die Involution, welche sie aus p projicirt, hat die conjungirt imaginären Deckstrahlen Q, R;

3) parabolisch, $q = r$ ist ihr Deckpunkt, dann berühren alle $\mathfrak{K}$ die P in q und $\overline{pq} = \overline{pr}$ stellt zwei zusammenfallende Hauptgerade $R = Q$ dar.

Die Deckstrahlen der beiden in $p = p'$ auftretenden projektivischen Büschel schneiden $P = P'$ natürlich in den Deckpunkten der projektivischen geraden Gebilde. Sind sind also in 1) reell und verschieden, in 2) imaginär, in 3) reell und zusammenfallend.

4) Es gehe P durch p, dann berühren alle $\mathfrak{K}$ die Gerade

P und osculiren einander in p. Gleichzeitig können die in $p = p'$ auftretenden projektivischen Büschel nur den Strahl $P = P'$ zum Deckstrahl haben, denn jeder andere müsste $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in demselben sich selbst entsprechenden Punkte schneiden, was unmöglich ist, da $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ sich nicht mehr schneiden, ausser in $a' = b$.

Das Hauptdreieck der Collineation ist mithin in den Fällen 1), 3), 4) vollständig reell und zwar ist es in 1) ein eigentliches Dreieck mit drei von einander verschiedenen Ecken, in 3) fallen zwei Ecken und daher auch zwei Seiten zusammen, in 4) fallen alle drei Ecken in einen Punkt und alle drei Seiten in eine durch den Punkt gehende Gerade. In 2) ist von dem Dreieck nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite reell.

§ 2. Das zwei Polarsystemen gemeinsame Poldreieck.

Es seien zwei Polarsysteme K, K' in derselben Ebene gegeben, gleichgültig ob die Ordnungskegelschnitte derselben reell oder imaginär sind. Bestimmt man zu jeder Geraden A die Pole a und a', welche ihr in K und K' entsprechen und weist diese Punkte a, a' einander zu, so ist die dadurch entstehende Beziehung zwischen den Punkten der Ebene eine *Collineation*. Denn jeder durch a gehenden Geraden X wird eine durch a' gehende Gerade X' entsprechen. (Kap. II, § 2, Seite 28).

Dieselbe Collineation wird auch erhalten, wenn jeder Geraden G der Ebene die Gerade G' zugewiesen wird, so dass G für K denselben Pol hat, wie G' für K'.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle:

a) die Collineation ist central,

b) die Collineation ist nicht central.

a) Ist die Collineation central, so soll das Centrum c derselben

1) nicht auf der Collineationsaxe C liegen,

2) es soll auf der Collineationsaxe C liegen.

1) Jeder Punkt a der Collineationsaxe hat in Bezug auf K und K' dieselbe Polare A und diese Polaren müssen durch

c gehen, denn sie fallen mit ihren entsprechenden Geraden der Collineation zusammen. Es ist daher c Pol von C für K und K'. Schneidet A die C im Punkte b, so ist dieser Pol der Geraden $B = \overline{ac}$ für K und K'. Mithin ist abc ein beiden Polarsystemen gemeinschaftliches Poldreieck und es existiren unendlich viele solcher, jedem Punkte von C gehört eines zu.

Die Polarsysteme haben auf C dieselbe Polinvolution und in c dieselbe Polareninvolution, welche die Projektion der ersteren ist. Ist dieselbe hyperbolisch, g, h ihre Deckpunkte, so berühren K und K' die Geraden $\overline{cg}$ und $\overline{ch}$ in g, h, oder beide Kegelschnitte *berühren einander doppelt* auf C.

Wir wollen diese Ausdrucksweise auch für den Fall beibehalten, dass die Involution elliptisch ist und können daher diesen Fall dahin charakterisiren: *Die beiden Polarsysteme haben auf C eine doppelte Berührung.* Die Ordnungskegelschnitte können sich nicht mehr schneiden. (Kap. IV, § 1.)

2) Liegt c auf C, so wird wieder c der Pol von C für K und K', diese müssen also beide reell sein und C in c berühren. Ist a ein Punkt von C und A seine Polare für K und K', so stellt a und der doppelt gezählte Punkt c ein Poldreieck beider Kegelschnitte dar, dessen Seiten A und die doppelt gezählte Gerade C ist. Es gibt also unendlich viele beiden Kegelschnitten conjugirte Dreiecke.

Die Kegelschnitte schneiden einander in c in vier Punkten; es sind die Punkte g, h, in denen sie sich berührten (Fall 1), beide in den Punkt c gerückt.

Wir wollen im Folgenden diese beiden Fälle stets gesondert von den übrigen betrachten und wenn nichts erwähnt wird immer voraussetzen, dass die Polarsysteme die wir betrachten, nicht eine doppelte Berührung haben.

b) Ist die Collineation nicht central, so tritt immer ein Hauptpunkt $p = p'$ und eine Hauptgerade $P = P'$ auf. Dem Punkte $p = p'$ entspricht dann in Bezug auf K und K' dieselbe Polare, sie sei mit P_1 bezeichnet; wir wollen zeigen, dass sie identisch ist mit $P = P'$. Sei nämlich A eine beliebige durch $p = p'$ gehende Gerade, welcher daher in der Collineation

eine ebenfalls durch $p = p'$ gehende Gerade A' entspricht. Schneidet nun A die P_1 in x, so geht die Polare X von x in Bezug auf K durch $p = p'$ und daher liegt ihr Pol in Bezug auf K' sowol auf P_1 als auf A' d. h. er ist der Schnittpunkt x' beider Geraden. Das Perspektivitätscentrum α der projektivischen Punktreihen auf A und A' liegt daher auf $P_1 = \overline{xx'}$, diese Gerade ist also mit der Hauptgeraden $P = P'$ identisch (§ 1).

Schneidet die Polare X des Punktes x von P die Hauptgerade P in ξ, so ist x, ξ ein Paar conjugirter Pole für K und x', ξ ein solches für K', und da x, x' homologe Punkte der projektivischen geraden Gebilde auf $P = P'$ sind, so ist die ihnen adjungirte Involution auch adjungirt den beiden Polinvolutionen, die K und K' auf P zugehören (Kapitel IV, § 2, Seite 80).

Wir unterscheiden nun die drei Fälle des § 1:

1) Das Hauptdreieck der Collineation ist reell, dann ist dasselbe ein beiden Polarsystemen angehörendes Poldreieck pqr, jede Ecke ist Polare der gegenüberliegenden Seite, denn q, r [die Deckpunkte der adjungirten Involution auf P] sind das beiden Polinvolutionen von K und K' gemeinschaftliche Paar conjugirter Pole. (Kap. IV, § 2, Lehrs. 3, Folg. 3, S. 81.)

2) Es ist nur p und seine Polare P reell, dieselben stellen eine Ecke und eine Seite des beiden Polarsystemen angehörenden Poldreieckes dar. Die zwei übrigen Ecken sind die conjungirt imaginären Deckpunkte der elliptischen adjungirten Involution.

Nach (Kap. IV, § 2, Folgerung 2 zu Lehrsatz 3, Seite 81) müssen dann die Polinvolutionen von K und K' auf P hyperbolisch sein, und ihre Deckpunkte g, h resp. g', h' trennen einander. In diesem Falle sind also sowol K als K' reelle Kegelschnitte, welche P in g, h resp. g', h' schneiden.

3) Ist die Involution auf P parabolisch und $q = r$ das einzige Deckelement, so müssen die Polinvolutionen von K und K' auf P (nach Kap. IV, § 2, Folgerung 4 zu Lehrsatz 3, Seite 81) hyperbolisch sein, und q ist ein Deckpunkt beider. Daher ist $\overline{pq} = Q$ Tangente von K und K' in q, beide Kegel-

schnitte sind daher reell und berühren einander in q. Das einzige beiden gemeinschaftliche Poldreieck besteht aus p, dem doppelt gezählten Punkte $q = r$ und aus der Geraden P und der doppelt gezählten Q.

4) Die Polare P von p geht durch p, beide Kegelschnitte berühren daher P in p und müssen mithin reell sein; das beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche Poldreieck besteht aus dem dreifach gezählten Punkte p resp. der dreifach gezählten Geraden P. Wir werden später sehen, dass sich K und K' in p osculiren.

Aus dem Vorstehenden folgt: *Ist einer der beiden Kegelschnitte K, K' imaginär, so ist das beiden Kegelschnitten conjugirte Poldreieck stets reell, und seine drei Ecken sind von einander verschieden.*

§ 3. Die Steiner'sche Verwandtschaft.

Es seien zwei Polarsysteme K und K' gegeben, die nicht in doppelter Berührung stehen, dem Punkte a möge für K die Polare A, für K' die Polare A' entsprechen. Der Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ von A und A' werde dem Punkte a zugewiesen. Die Beziehung, welche durch diese Zuweisung zwischen den Punkten der Ebene hergestellt wird, heisst *Steiner'sche Verwandtschaft.* Dieselbe ist involutorisch, denn bezeichnet man a mit $\mathfrak{b}$, so fällt der Punkt b auf $\mathfrak{a}$, da die Polaren von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf K und K' durch a gehen. a, $\mathfrak{a}$ sind conjugirte Pole in beiden Polarsystemen. Ist p ein Hauptpunkt, P die ihm zugehörende Hauptgerade der in § 2 aufgestellten Collineation, so wird dem Punkte p in der Steiner'schen Verwandtschaft jeder Punkt $\mathfrak{p}$ von P entsprechen. Dasselbe findet für die Punkte q, r statt. p, q, r heissen *Hauptpunkte der Steiner'schen Verwandtschaft.*

Sie sind die einzigen Ausnahmepunkte, denen nicht wieder ein einziger Punkt entspricht. Würde nämlich einem Punkte x der Punkt $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ entsprechen, so müsste $\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}$ die Polare von x für K und K' sein.

Lehrsatz 1. *Den Punkten einer Geraden G entsprechen in der Steiner'schen Verwandtschaft die Punkte eines Kegel-*

schnittes $\mathfrak{K}$, *der durch die Pole* g *und* g' *von* G *in Bezug auf* K *und* K' *geht, und durch die einander homologen Büschel* $(g) \barwedge (g')$, *der in* § 2 *betrachteten Collineation, erzeugt wird.*

Denn durchläuft a die Gerade G, so drehen sich A und A' um g resp. g' und beschreiben homologe Strahlenbüschel der Collineation des § 2, ihr Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ durchläuft also $\mathfrak{K}$. Geht G durch p, so entspricht ihr nur mehr eine Gerade G' durch p, indem die Büschel (g) und (g') perspektivisch werden.

Das von a beschriebene gerade Gebilde auf G ist projektivisch jedem der Polarenbüschel (g) und (g'), und diese sind projektivisch dem krummen Gebilde, welches $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{K}$ beschreibt, also wird der Büschel $p(a) \barwedge p(\mathfrak{a})$, denn $\mathfrak{K}$ geht durch p. Da nun den Punkten des Strahles $\overline{pa}$ die Punkte des Strahles $\overline{p\mathfrak{a}}$ in der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechen, und diese involutorisch ist, so ergibt sich der

Lehrsatz 2. *Projicirt man die einander entsprechenden Punkte* a, $\mathfrak{a}$ *der Steiner'schen Verwandtschaft aus einem Hauptpunkte derselben, so erhält man eine Strahleninvolution.*

Ist das Poldreieck pqr reell und seine Ecken p, q, r von einander verschieden, so werden in den Ecken Strahleninvolutionen auftreten, deren Paare entsprechende Punkte der Steiner'schen Verwandtschaft tragen. In jeder Involution sind die zwei Seiten des Hauptdreieckes ein Paar.

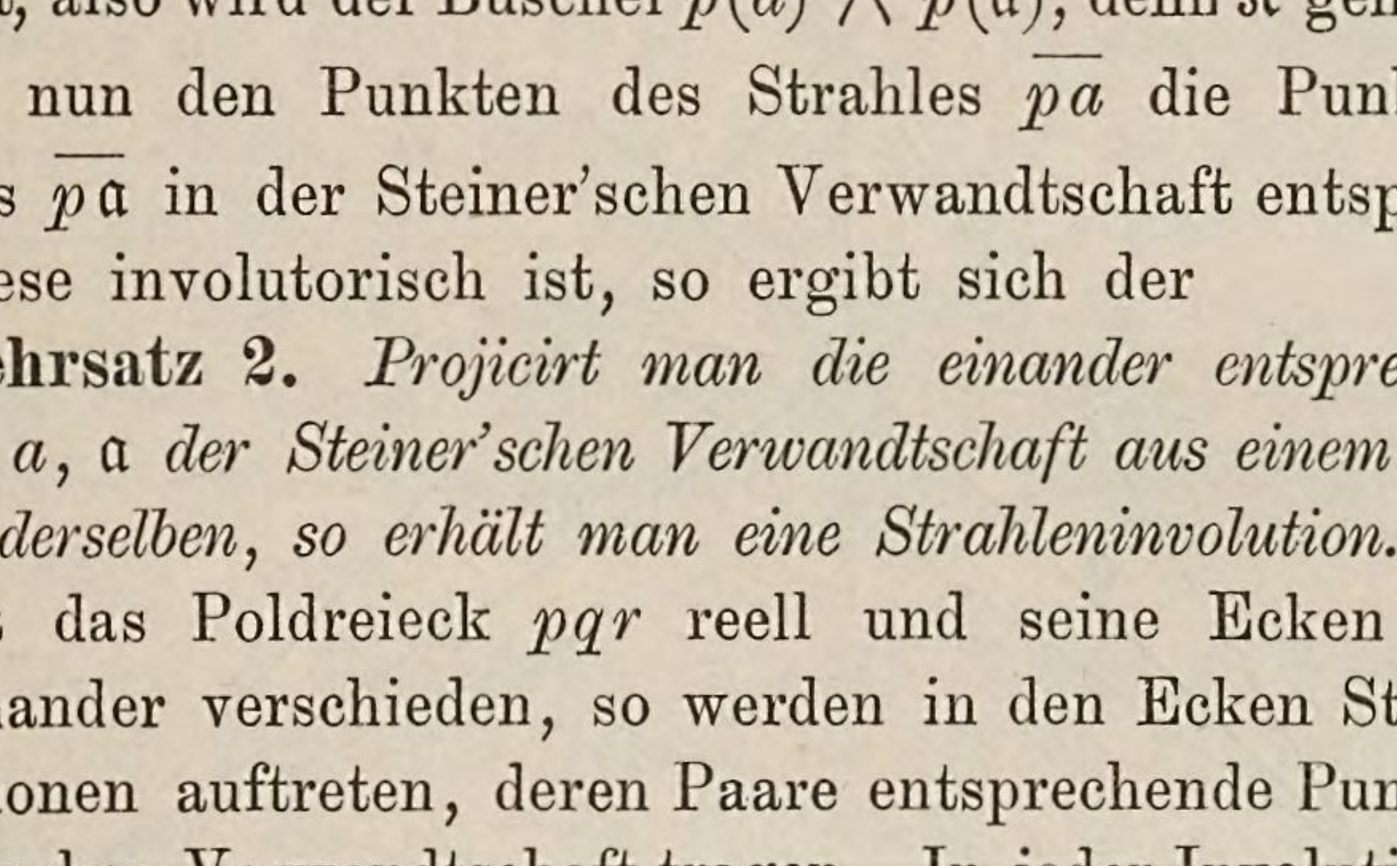


Fig. 60.

Es mögen nun die Involutionen in r und q elliptisch Fig. 60.
sein, dann wird dem Punkte a, der im Winkelraume rpq

ausserhalb des Dreieckes liegt, notwendig ein Punkt $\mathfrak{a}$ entsprechen, der innerhalb des Dreieckes gelegen ist, denn $\overline{ra}$ und $\overline{r\mathfrak{a}}$ müssen durch die Strahlen $\overline{rq}$ und $\overline{rp}$ getrennt werden, ebenso $\overline{qa}$ und $\overline{q\mathfrak{a}}$ durch $\overline{qp}$ und $\overline{qr}$. Da nun a und $\mathfrak{a}$ in demselben Winkelraume rpq liegen, so werden $\overline{pa}$ und $\overline{p\mathfrak{a}}$ von $\overline{pr}$ und $\overline{pq}$ *nicht* getrennt, daher ist die Involution in p *hyperbolisch.*

Fig. 61. Sind die Involutionen in p und q hyperbolisch, so mögen sich ihre Deckstrahlen in a, b, c, d schneiden, so dass

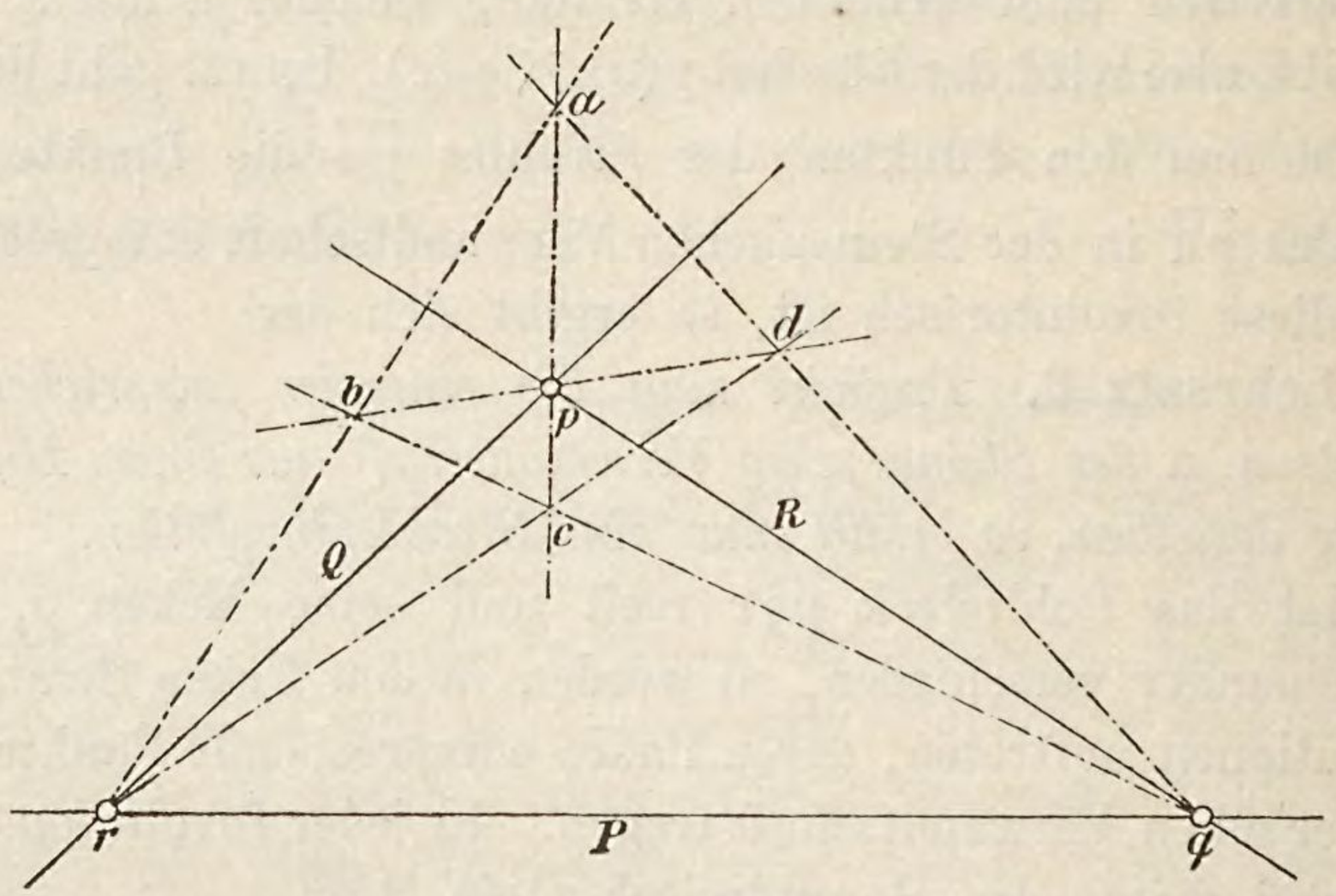


Fig. 61.

$\overline{pac}, \overline{pbd}$ die Deckstrahlen in p und $\overline{qad}, \overline{qbc}$ die Deckstrahlen in q sind. Der Punkt a fällt dann offenbar mit seinem entsprechenden $\mathfrak{a}$ zusammen, also ist $\overline{ra}$ ein Deckstrahl der Involution in r, diese ist mithin auch hyperbolisch, und ihre zwei Deckstrahlen müssen die vier Punkte a, b, c, d enthalten. Diese bilden ein Viereck, dessen Diagonaldreieck pqr ist. Daher der

Lehrsatz 3. *Ist das Hauptdreieck pqr reell, so ist stets eine von den drei in p, q, r auftretenden Involutionen hyperbolisch. Sind zwei derselben hyperbolisch, so ist es auch die dritte. Ist eine elliptisch, so ist es noch eine, die dritte ist aber hyperbolisch.*

Zusatz. Sind Δ, Δ_1 die Deckstrahlen der Involution

$\{p\}$, so haben K, K' auf Δ und Δ_1 dieselben Polinvolutionen $\{\Delta\}$ resp. $\{\Delta_1\}$.

Fallen von den Ecken des Hauptdreieckes zwei oder alle drei in einen Punkt, so tritt nichtsdestoweniger in diesem eine Strahleninvolution auf, welche die entsprechenden Punkte der Steiner'schen Verwandtschaft projicirt. Es möge bemerkt werden, dass die Strahleninvolutionen *nicht parabolisch* sein können.

Lehrsatz 4. *Ist pqr ein Tripel conjugirter Pole eines Polarsystems K, mit reellem oder imaginärem Kegelschnitte, und sind $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$, ... conjugirte Pole desselben, derart, dass die Strahlen $\overline{pa}\ \overline{p\mathfrak{a}}$, $\overline{pb}\ \overline{p\mathfrak{b}}$, $\overline{pc}\ \overline{p\mathfrak{c}}$, ... in (p) eine Strahleninvolution $\{p\}$ bilden, in welcher auch $\overline{pq}\ \overline{pr}$ als Paar auftritt, so werden $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$, ... auch aus q und r durch je eine Involution $\{q\}$ und $\{r\}$ projicirt, in welcher die beiden Dreiecksseiten ein Paar bilden. Die Punkte p, q, r sind Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft, deren entsprechende Punkte $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$, ... sind.*

Denn sei A die Polare von a für K, und A' irgend eine andere durch $\mathfrak{a}$ gehende Gerade, so ist ein Polarsystem K' bestimmt, für das pqr ein Poldreieck und a, A' Pol und Polare sind (Kapitel IV, § 4, 3, Seite 92). Die Kegelschnitte K, K' bestimmen nun eine Steiner'sche Verwandtschaft, für die pqr Hauptdreieck und a, $\mathfrak{a}$ ein Paar entsprechender Punkte sind. Der Steiner'schen Verwandtschaft gehört also in p die Involution $\{p\}$ zu, mithin sind auch $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$ ... entsprechende Punkte, da sie auf Strahlenpaaren von $\{p\}$ liegen und für K conjugirte Pole sind.

Zusatz. Der Lehrsatz 4 bleibt richtig, wenn q und r coïncidiren und lautet dann: *Werden die Punkte $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$, ..., die conjugirt in Bezug auf K sind, aus einem Punkte q von K durch eine Strahleninvolution $\{q\}$ projicirt, in der der Tangente Q von K die Gerade P zugehört und ist p der Pol von P, so werden $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$. ... auch aus p durch eine Strahleninvolution $\{p\}$ projicirt, die Q zu einem Deckstrahle hat.*

Lehrsatz 5. *Die Steiner'sche Verwandtschaft ist bestimmt durch einen Kegelschnitt K und die Involution $\{p\}$ in p.*

Zu jedem Punkte a kann der entsprechende $\mathfrak{a}$ construirt werden als Schnittpunkt der Polare A von a für K und des Strahles von $\{p\}$, welcher $\overline{pa}$ conjugirt ist.

§ 4. Die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte.

Da ein Kegelschnitt durch irgend fünf seiner Punkte vollkommen bestimmt ist, so können zwei Kegelschnitte K und K', die in derselben Ebene liegen, höchstens vier Punkte gemeinschaftlich haben. Befinden sich K und K' in doppelter Berührung § 2 a), so sahen wir, dass die Anzahl gemeinschaftlicher Punkte thatsächlich vier ist, indem jeder Berührungspunkt für zwei Schnittpunkte zählt. Diese Berührungspunkte können conjungirt imaginär, reell und verschieden oder zusammenfallend sein. Wir wollen diesen Fall für das Folgende ausschliessen und setzen daher voraus, K und K' stehen nicht in doppelter Berührung. Wir unterscheiden die vier Fälle b) des § 2.

1) Das beiden Kegelschnitten K, K' gemeinsame Poldreieck pqr ist reell und dieselben haben:

α) Einen Punkt a gemeinschaftlich, dann schneiden sie sich noch in drei weiteren reellen Punkten b, c, d. Denn die in p, q, r auftretenden Involutionen der Steiner'schen Verwandtschaft sind alle hyperbolisch, indem die Strahlen, welche a projiciren, Deckstrahlen derselben sind. pqr ist Diagonaldreieck des Viereckes $abcd$.

Umgekehrt, schneiden sich zwei Kegelschnitte K und K' in vier reellen Punkten a, b, c, d, so ist das Diagonaldreieck pqr des Viereckes $abcd$ beiden Kegelschnitten conjugirt (Kap. III., § 7).

β) Keinen reellen Punkt gemeinschaftlich, dann müssen die Involutionen der Steiner'schen Verwandtschaft in zwei Ecken q, r elliptisch und in der dritten p hyperbolisch sein. Sind Δ, Δ_1 die Deckstrahlen der letzteren, so haben K und K' auf Δ sowie auf Δ_1 dieselben Polinvolutionen und diese müssen elliptisch sein, denn ihre Deckpunkte gehören K und K' an.

Umgekehrt, haben zwei Kegelschnitte dieselben elliptischen

Polinvolutionen auf den Geraden Δ und Δ_1 [solche Kegelschnitte sind nach Kap. IV, § 1 stets möglich], so ist das beiden gemeinschaftliche Poldreieck reell. Denn ist p der Schnittpunkt von Δ und Δ_1 und $\mathfrak{p}$ der zu p auf Δ, $\mathfrak{p}_1$ der zu p auf Δ_1 conjugirte Punkt, so treten auf $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1} = P$ zwei Punkte q, r auf, aus denen sich die Involutionen auf Δ und Δ_1 in einander projiciren und pqr ist ein beiden Kegelschnitten conjugirtes Poldreieck. (Vergl. die Anmerkung Kap. IV, § 3, Seite 84.)

Ist mithin das beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche Poldreieck reell und seine Ecken von einander verschieden, so haben beide Kegelschnitte entweder vier reelle oder vier imaginäre Punkte gemeinschaftlich. Die reellen Punkte sind alle von einander verschieden und die imaginären bestehen aus zwei Paar conjungirten, liegen daher auf zwei rellen Geraden. Die Umkehr dieses Satzes ist auch richtig.

2) Von dem beiden Kegelschnitten gemeinsamen Poldreiecke ist nur eine Ecke p und die gegenüberliegende Seite P reell. Wir haben in § 2 gezeigt, dass in diesem Falle K und K' die Gerade P in den reellen Punkten g, h resp. g', h' schneiden müssen, und dass g, h von g', h' getrennt werden. In Folge dessen liegen g' und h' in verschiedenen Theilen der Ebene, in welche diese durch K zerlegt wird (Kap. III, § 7, Folgerung 4 zu Lehrsatz 2, Seite 64). Denkt man sich daher einen Punkt auf K', von g' ausgehend, diesen beschreiben, so muss er nach h' gelangen, und da K' eine geschlossene Linie ist, von da wieder nach g', ohne den Sinn der Bewegung zu ändern. Daher muss der Punkt zweimal die Kegelschnittslinie K überschreiten, oder K und K' haben wenigstens zwei reelle Schnittpunkte. Ist a einer derselben, so ist $\overline{pa} = \Delta$ ein Deckstrahl der in p auftretenden Involution $\{p\}$ der Steiner'schen Verwandtschaft, mithin existirt noch ein zweiter Deckstrahl Δ_1. Die Polinvolution auf Δ und Δ_1 von K ist dieselbe, wie die von K'. Die auf Δ ist hyperbolisch, da a ein Deckpunkt ist, mithin existirt noch ein Deckpunkt b und dieser ist ein Punkt von K und K'. Die Involution auf Δ_1 ist elliptisch, denn wäre sie hyperbolisch, so würde der Fall 1) α) vorhanden sein, also könnte das Poldreieck nicht ima-

ginär sein. Die Punkte a, b auf Δ werden durch p und den Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ von Δ mit P harmonisch getrennt.

Umgekehrt, haben zwei Kegelschnitte K und K' zwei reelle Punkte a, b und zwei conjungirt imaginäre gemeinschaftlich [solche Kegelschnitte können gezeichnet werden Kap. IV, § 1, Aufgabe 3, Seite 70], so ist das Poldreieck, welches beiden gemeinschaftlich angehört, imaginär. Es ist der Schnittpunkt p von $ab = \Delta$ mit der Geraden Δ_1, welche die conjungirt imaginären Punkte trägt, Pol für beide Kegelschnitte der Geraden P, welche die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ von Δ resp. Δ_1 enthält, die p in den Polinvolutionen $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ entsprechen. Daher muss p ausserhalb K und K' liegen, denn Δ_1 schneidet beide in imaginären Punkten, mithin schneiden K und K' die Gerade P in reellen Punkten g, h resp. g', h'. Die Punkte g, h und g', h' müssen einander trennen, denn sonst existirte ein Punktepaar q, r, welches sowol g, h als g', h' harmonisch trennt, also wäre pqr ein beiden Kegelschnitten K, K' gemeinschaftliches Poldreieck und diese hätten ausser a, b noch zwei reelle Schnittpunkte, was unmöglich ist, da sie auf Δ_1 dieselbe Polinvolution besitzen. (Vergl. Aufgabe 3, Kap. IV, § 1, Seite 70.)

Ist also von dem gemeinschaftlichen Poldreiecke beider Kegelschnitte nur eine Ecke p und die gegenüberliegende Seite reell, so schneiden sich die Kegelschnitte in zwei reellen, von einander verschiedenen und zwei conjungirt imaginären Punkten.

3) Fallen q und r auf P in den Punkt q zusammen, so dass das gemeinschaftliche Poldreieck beider Kegelschnitte aus p und dem doppelt gezählten Punkte q resp. aus P und der doppelt gezählten Geraden $\overline{pq} = Q$ besteht, so haben wir schon gesehen, dass die Kegelschnitte einander in q berühren und Q ihre gemeinschaftliche Tangente ist. Daher ist die Involution der Steiner'schen Verwandtschaft in p hyperbolisch, indem Q ein Deckstrahl ist, dieselbe besitzt daher noch einen Deckstrahl Δ. Auf Δ haben K und K' dieselbe Polinvolution; diese ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem die Involution der Steiner'schen Verwandtschaft in q hyperbolisch oder elliptisch ist. *Die Kegelschnitte haben also noch zwei*

reelle von einander verschiedene, oder zwei conjungirt imaginäre Punkte gemeinschaftlich.

Umgekehrt, berühren einander zwei Kegelschnitte K und K' in dem Punkte q und ist Q ihre gemeinschaftliche Tangente, so wird jeder Geraden G durch q ein Pol g für K und g' für K' auf Q entsprechen. Beschreibt G den Strahlenbüschel (q), so durchlaufen g, g' zwei projektivische Punktreihen, die in q, dem Pol von Q für K und K', einen Deckpunkt besitzen, also noch einen zweiten p besitzen müssen. Gehört nun zu diesem die Polare P für K und K', und ist P von Q verschieden, so sind die Polinvolutionen von K und K' auf P hyperbolisch und q ist ein Deckpunkt beider, daher ist die ihnen adjungirte Involution parabolisch (Kap. IV, § 2, Folgerung 4 zu Lehrsatz 3), also besteht das beiden Kegelschnitten gleichzeitig conjugirte Poldreieck aus p und dem doppelt gezählten Punkte q.

Der Berührungspunkt q zählt für zwei Schnittpunkte von K und K', die zwei anderen können reell und verschieden oder conjungirt imaginär sein.

4) Geht P durch p, so berühren einander K und K' in p, und P ist ein Deckstrahl der in p auftretenden Involution der Steiner'schen Verwandtschaft. Daher existirt noch ein zweiter Deckstrahl Δ. Auf diesem haben K und K' die nämliche Polinvolution. Diese ist hyperbolisch und p ist ein Deckpunkt derselben.

Also existirt noch ein solcher a, der von p verschieden ist, da die Kegelschnitte Δ nicht berühren können. Dieser Punkt a ist der einzige noch vorhandene Schnittpunkt beider Kegelschnitte. Denn würde noch ein Punkt b vorhanden sein, so wäre $\overline{pb}$ ein dritter Deckstrahl der Involution in p. In a können sich aber K und K' nicht berühren, weil sie dann in doppelter Berührung wären. Da nun K' bei a aus dem einem Gebiete der Ebene, in welches sie durch K zerlegt wird, in das andere übertritt, so muss dasselbe bei p geschehen d. h. K und K' können einander in p *nicht blos berühren*, sondern es tritt noch jeder Kegelschnitt aus dem einen Gebiete der Ebene in das andere über, in welche jeder

derselben die Ebene zerlegt, die Kegelschnitte *osculiren* einander in p oder haben daselbst *drei* Schnittpunkte gemeinschaftlich.

Es folgt aus 3), dass wenn einander die Kegelschnitte K und K' in p osculiren und P ihre gemeinschaftliche Tangente ist, dann die projektivischen Punktreihen g, g' auf P, welche von den Polen der Strahlen G von (p) für K und K' beschrieben werden, zwei Deckpunkte besitzen, die beide in p fallen, und dass daher das beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche Poldreieck aus dem einzigen Punkte p und der Geraden P besteht.

Anmerkung. Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, dass sobald einer der Kegelschnitte imaginär ist, nur der Fall 1) β) vorliegen kann.

§ 5. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte.

Durch Polarisirung unter Zugrundelegung eines beliebigen Polarsystems K erhalten wir aus den Sätzen des § 4 folgende Sätze über die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte.

Haben die Polarsysteme eine doppelte Berührung, so stehen ihre Polarfiguren ebenfalls in doppelter Berührung. Findet dieses nicht statt, so unterscheiden wir wieder die vier Fälle b) des § 2:

1) Das beiden Kegelschnitten K, K' gemeinsame Poldreieck pqr ist reell, und dieselben haben:

α') Eine Tangente $\mathfrak{A}$ gemeinschaftlich, so haben sie noch drei weitere reelle Tangenten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ gemeinschaftlich und dieselben bilden ein Vierseit, dessen Diagonaldreiseit das Dreieck pqr ist. Umgekehrt, haben zwei Kegelschnitte vier reelle Tangenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ gemeinschaftlich, so ist das Diagonaldreiseit des Vierseites $\mathfrak{ABCD}$ beiden gleichzeitig conjugirt.

β') Keine reelle Tangente gemeinschaftlich, dann müssen auf einer Seite P des Poldreieckes zwei Punkte δ, δ_1 vorhanden sein, in denen K und K' dieselben Polareninvolutionen

haben. Umgekehrt, haben K und K' in δ und δ_1 dieselbe elliptische Polareninvolution, so ist das beiden gemeinschaftliche Poldreieck reell.

2) Von dem Poldreieck beider Kegelschnitte ist nur p und P reell, dann haben K und K' zwei reelle von einander verschiedene und zwei conjungirt imaginäre Tangenten gemeinschaftlich. Umgekehrt, haben K und K' zwei reelle und zwei conjungirt imaginäre Tangenten gemeinschaftlich, so ist vom gemeinschaftlichen Poldreieck nur eine Ecke p und eine Seite P reell.

3) Fallen zwei Ecken $q = r$ in den Punkt q zusammen, so berühren einander K und K' in q und haben noch zwei reelle oder conjungirt imaginäre Tangenten gemeinschaftlich.

4) Besteht das beiden Kegelschnitten gemeinsame Poldreieck aus dem einzigen Punkte p und der Geraden P, so osculiren einander K und K' in p und haben noch eine reelle Tangente gemeinschaftlich.

§. 6. Die gegenseitige Lage zweier Kegelschnitte.

Fassen wir die Resultate der letzten zwei Paragraphen zusammen, so ergeben sich folgende mögliche Lagen zweier Kegelschnitte gegen einander, wenn wir beide reell voraussetzen:

a) Die Kegelschnitte K und K' stehen in doppelter Berührung und die Berührungspunkte sind:

1) reell und getrennt auf C, dann berühren beide Kegelschnitte die Geraden $\overline{cg}$, $\overline{ch}$ und zwar können die Kegelschnitte

α) beide in demselben Winkelraume verlaufen, also der eine den anderen einschliessen, oder

β) einer in einem, der andere im Nebenwinkelraume verlaufen, also jeder ganz aufserhalb des anderen liegen;

2) conjungirt imaginär, dann mufs einer der Kegelschnitte ganz innerhalb des anderen verlaufen. Es seien a, a' und b, b' zwei Paare conjugirter Pole auf C, welche K und K' gemeinschaftlich sind. Projicirt man nun die Ebene beider Kegelschnitte auf eine andere $\mathfrak{E}$ so, dass C die unendlich ferne Gerade von $\mathfrak{E}$ wird und die Projektion von $\overline{ca}$ zu $\overline{ca'}$

senkrecht wird, ebenso die Projektion von $\overline{cb}$ senkrecht zu $\overline{cb'}$ *), so ist die Projektion von K und K' je ein Kreis $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, welche die Projektion $\mathfrak{c}'$ von c zum gemeinsamen Mittelpunkt haben. Es ist umgekehrt klar, dass zwei concentrische Kreise in doppelter Berührung stehen, da sie auf der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene dieselbe Polinvolution besitzen, deren Pol in Bezug auf beide Kreise der gemeinschaftliche Mittelpunkt ist. (Kap. IV, § 1, Anmerkung auf Seite 72.)

3) Die Berührungspunkte auf C fallen zusammen in c, in welchem sich beide Kegelschnitte dann in vier auf einanderfolgenden Punkten schneiden und C zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Wird eine Centralcollineation bestimmt durch c als Centrum und C als Axe und wird einem Punkte a von K ein Punkt a' von K' zugewiesen, so ist K' die Collinearfigur von K.

b) Die Kegelschnitte K und K' stehen nicht in doppelter Berührung. Dann unterscheiden wir die vier Fälle bezüglich des ihnen gemeinsamen Poldreieckes:

1) Das Poldreieck $p\,q\,r$ ist reell, die Kegelschnitte haben:

a) Vier reelle Schnittpunkte a, b, c, d und vier reelle Tangenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$. Das Diagonaldreieck des Viereckes $a\,b\,c\,d$ ist identisch mit dem Diagonaldreiseit des Vierseites $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ und zwar ist dasselbe das gemeinschaftliche Poldreieck $p\,q\,r$. Der eine Kegelschnitt verläuft zum Theil ausserhalb, zum Theil innerhalb des anderen. Beide Kegelschnitte schliessen dieselbe Ecke des gemeinsamen Poldreieckes ein.

b) Vier imaginäre Schnittpunkte auf Δ, Δ_1 und vier reelle Tangenten. Dann liegt jeder Kegelschnitt ganz ausserhalb des anderen. Denn da sie imaginäre Schnittpunkte haben, so muss entweder der eine K' ganz innerhalb des anderen K verlaufen, oder es liegt jeder ganz ausserhalb des anderen. Würde aber K' ganz innerhalb K verlaufen, so

---

*) Legt man durch C eine Ebene $\mathfrak{E}'$ und construirt in dieser über $a\,.\,a'$ und $b\,.\,b'$ als Durchmesser zwei Kreise, die sich in o schneiden mögen, so wird E aus o auf eine zu $\mathfrak{E}'$ parallele Ebene $\mathfrak{E}$ in der verlangten Art projicirt.

würden seine Tangenten alle K in zwei rellen getrennten Punkten schneiden und keine derselben könnte daher auch Tangente von K sein. Eine Ecke des gemeinsamen Poldreieckes liegt ausserhalb beider Kegelschnitte, von den beiden anderen liegt je eine innerhalb eines der Kegelschnitte.

Umgekehrt, liegt jeder Kegelschnitt ganz ausserhalb des anderen, so haben sie vier imaginäre Schnittpunkte und vier reelle Tangenten. Denn die Gerade P schneidet dann K und K' entweder in reellen oder in imaginären Punkten. Ist ein Paar imaginär, so sind die Punkte q, r, welche gleichzeitig für K und K' conjugirte Pole sind, reell. Sind aber die Schnittpunkte gh, $g'h'$ von K und K' mit P reell, so müssen g, h und g', h' einander ausschliessen, da es K und K' thun, also sind q, r, welche g, h und g', h' gleichzeitig harmonisch trennen, wieder reell, mithin ist das Poldreieck reell und die Kegelschnitte haben vier imaginäre Schnittpunkte und vier reelle Tangenten gemeinschaftlich.

c) Vier imaginäre Schnittpunkte auf Δ, Δ_1 und vier imaginäre Tangenten in δ, δ_1. Dann liegt der eine z. B. K' ganz innerhalb des anderen, wie aus b) folgt. Eine Ecke des gemeinsamen Poldreieckes liegt innerhalb beider Kegelschnitte.

Umgekehrt, liegt K' ganz innerhalb K, so haben beide Kegelschnitte vier imaginäre Schnittpunkte und vier imaginäre Tangenten.

b) Vier reelle Schnittpunkte a, b, c, d und vier imaginäre Tangenten in δ und δ_1. Jeder Kegelschnitt verläuft zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb des anderen. Eine Ecke des gemeinsamen Poldreieckes liegt ausserhalb beider Kegelschnitte, die beiden anderen je eine innerhalb eines derselben. Die Polarfigur zweier derartig liegender Kegelschnitte ist der Fall b) und umgekehrt gibt der Fall b) durch Polarisirung unter zu Grundelegung einer beliebigen Basis K diesen Fall b. Da nun der Mittelpunkt der Basis nie innerhalb beider Kegelschnitte liegen kann, wenn diese die Lage des Falles b) haben, so muss im Falle b) notwendig einer der Kegelschnitte eine Hyperbel sein. (Anmerkung auf Seite 100.)

2) Vom Poldreiecke ist nur reell die Ecke p und die gegenüberliegende Seite P. Beide Kegelschnitte haben zwei

reelle Schnittpunkte a, b auf Δ und zwei conjungirt imaginäre auf Δ_1, sowie zwei reelle Tangenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in δ und zwei conjungirt imaginäre in δ_1 gemeinschaftlich.

3) Vom Poldreiecke fallen zwei Ecken $q = r$ auf P in eine zusammen und zwei der Seiten $Q = R$ durch p coïncidiren. Die Kegelschnitte haben in $q = r$ zwei zusammenfallende Schnittpunkte und in $Q = R$ zwei coïncidirende Tangenten gemeinschaftlich, überdiess können sie noch haben:

a) zwei reelle Schnittpunkte und zwei reelle Tangenten,

b) zwei imaginäre Schnittpunkte und zwei reelle Tangenten,

c) zwei imaginäre Schnittpunkte und zwei imaginäre Tangenten,

d) zwei reelle Schnittpunkte und zwei imaginäre Tangenten.

Diese vier Fälle correspondiren den vier Fällen unter 1) und es ist leicht die Lage der Kegelschnitte gegeneinander anzugeben nach dem dort Gesagten.

4) Das Poldreieck besteht aus dem Punkte p und der Geraden P. Die Kegelschnitte osculiren einander in p und haben in P drei zusammenfallende Tangenten gemeinschaftlich. Sie schneiden einander nur noch in einem Punkte a und haben nur noch eine Tangente $\mathfrak{A}$ gemeinschaftlich.

§ 7. Aufgaben betreffend zwei Kegelschnitte.

Aufgabe 1. Zwei Kegelschnitte K, K' sind durch irgend welche Bestimmungsstücke gegeben, man kennt das gemeinschaftliche Paar Pol und Polare p, P; es sind ihre Schnittpunkte und ihre gemeinschaftlichen Tangenten zu construiren.

Es seien a, b irgend zwei Punkte der Ebene A, A' und B, B' ihre Polaren für K resp. K', so ist der Schnittpunkt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von AA' resp. BB' zu a resp. b conjugirt für beide Kegelschnitte, also sind $\overline{pa}$, $\overline{p\mathfrak{a}}$ und $\overline{pb}$, $\overline{p\mathfrak{b}}$ zwei Paare der Involution $\{p\}$ der Steiner'schen Verwandtschaft. Ihre Deckstrahlen Δ, Δ_1 tragen je zwei der Schnittpunkte von K und K', welche sich daher als Schnittpunkte von Δ und Δ_1 mit K nach Aufgabe 1 des § 2, Kap. IV, Seite 76 bestimmen.

Wäre $\{p\}$ elliptisch, so muss das K und K' conjugirte Dreieck $p\,q\,r$ reell sein, und eine der Involutionen $\{r\}$ und $\{q\}$ ist noch elliptisch, die dritte ist hyperbolisch. Die letztere ist leicht aus der Lage der Punkte $a\,\mathfrak{a}$, $b\,\mathfrak{b}$ gegen $p\,q\,r$ herauszufinden. q, r selbst ergeben sich als das gemeinschaftliche Paar der Involutionen, die K und K' auf P induciren.

Um die gemeinschaftlichen Tangenten von K und K' zu construiren, bestimme man zu den Geraden A, B die Pole a, a' und b, b' für K und K', dann ist $\overline{a\,a'} = \mathfrak{A}$ und $\overline{b\,b'} = \mathfrak{B}$ die conjugirte Polare von A resp. B für beide Kegelschnitte. Die Schnittpunkte von A, $\mathfrak{A}$ und B, $\mathfrak{B}$ mit P bestimmen zwei Paare einer Involution $\{P\}$, deren Deckpunkte δ, δ_1 dieselbe Polareninvolution für K und K' haben. Die Deckstrahlen dieser sind gemeinschaftliche Tangenten von K und K'. Ist $\{P\}$ elliptisch, so ist das Poldreieck $P\,Q\,R$ reell und auf einer der Seiten R und Q ist die Involution noch elliptisch, auf der dritten hyperbolisch. Aus der Lage der Geraden A, $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ lässt sich die Seite leicht erkennen, auf der die Involution hyperbolisch ist. Q, R ergeben sich als das gemeinschaftliche Paar der Involution conjugirter Polaren, welche K und K' in p induciren.

Die vorstehenden Construktionen lassen sich alle mit Lineal und Zirkel durchführen.

Aufgabe 2. Es sind zwei Kegelschnitte K, K' gegeben; man bestimme ihre Schnittpunkte.

Nach dem Vorgange der §§ 2 und 1 bestimme man p und P, wodurch diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt ist.

Aufgabe 3. Von zwei Kegelschnitten K, K' sind gegeben zwei Schnittpunkte auf der Geraden Δ; man suche die anderen zwei, und die gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte.

Ist $\mathfrak{p}$ der Pol von Δ für K und $\mathfrak{p}'$ der für K', so hat die Gerade $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'} = P$ denselben Pol p für K und K', der auf Δ liegt und zu dem Schnittpunkte p_1 von P mit Δ conjugirt ist in der Involution, die K oder K' auf Δ induciren. Sind a, $\mathfrak{a}$ ein Paar conjugirter Pole für K und K', so ist die In-

volution $\{p\}$ bestimmt, indem Δ ein Deckstrahl ist, also Δ_1 von $\overline{pa}$, $\overline{p\mathfrak{a}}$ durch Δ harmonisch getrennt wird. Δ_1 ist also mit dem Lineal allein construirbar.

Die zwei Schnittpunkte auf Δ_1 und die gemeinschaftlichen Tangenten bestimmen sich wie in der Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Von zwei Kegelschnitten K, K' sind gegeben zwei gemeinschaftliche Tangenten durch die Involution $\{\delta\}$, man suche die zwei anderen gemeinschaftlichen Tangenten und die vier Schnittpunkte.

Diese Aufgabe ist die duale zu der dritten, ihre Lösung also durch diese gegeben.

Aufgabe 5. Von zwei Kegelschnitten sind drei Schnittpunkte gegeben; man suche den vierten Schnittpunkt und die gemeinschaftlichen Tangenten.

Liegen zwei der Schnittpunkte auf Δ (dieselben können auch conjungirt imaginär sein) und ist a der dritte Punkt, so bestimme man wie in der Aufgabe 3 den Punkt p und die Gerade P, dann geht $\overline{p\,a}$ durch den letzten Schnittpunkt b, welcher p, P von a harmonisch trennt. Diese Construktion ist mit dem Lineal allein durchführbar.

Die gemeinschaftlichen Tangenten ergeben sich wie in der Aufgabe 1.

Aufgabe 6. Von zwei Kegelschnitten sind gegeben drei gemeinschaftliche Tangenten; es ist die vierte gemeinschaftliche Tangente zu construiren, und die vier Schnittpunkte der Kegelschnitte zu bestimmen.

Die Aufgabe ist die duale zu der Aufgabe 6, also durch diese bereits gelöst.

Zusatz. Ein Kegelschnitt K und ein mit ihm concentrischer Kreis $\mathfrak{K}$ haben ein gemeinschaftliches Poldreieck, dessen Seiten die unendlich ferne Gerade und die Axen des Kegelschnittes sind. Nach dem Vorstehenden lassen sich demnach leicht die zwei Geraden Δ, Δ_1 finden, welche die gemeinschaftlichen Schnittpunkte tragen. Sind die Schnittpunkte reell, so bilden sie die Ecken eines Rechteckes.

VI. Kapitel.

Kegelschnittbüschel. — Kegelschnittschaar. — Kegelschnitte in doppelter Berührung. — Metrische Relationen.

§ 1. Der Kegelschnittbüschel.

Die Betrachtungen des vorigen Kapitels ergaben als wichtigste Folgerung, dass in der Ebene zweier Kegelschnitte K, K' stets wenigstens ein bestimmtes Geradenpaar Δ, Δ_1 existirt, auf dem K und K' dieselbe Involution conjugirter Pole $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ induciren. Der Schnittpunkt p von Δ, Δ_1 hat für beide Kegelschnitte dieselbe Polare P, welche Δ, Δ_1 in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ schneidet, so dass $p\,\mathfrak{p}$ ein Paar von $\{\Delta\}$ und $p\,\mathfrak{p}_1$ ein solches von $\{\Delta_1\}$ sind.

Durch jeden Punkt a der Ebene geht ein bestimmter Kegelschnitt K_a, der $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ zu Polinvolutionen besitzt (Kap. IV, § 1). *Die Gesammtheit dieser Kegelschnitte heisst Kegelschnittbüschel.*

Ist eine der Involutionen hyperbolisch, d, δ ihre Deckpunkte, so gehen alle Kegelschnitte K_a durch d, δ; diese heissen *Basis- oder Grundpunkte des Büschels.* Die elliptische Involution stellt ein Paar conjungirt imaginärer Basispunkte des Büschels dar. Ist eine der Involutionen $\{\Delta\}$ parabolisch, d ihr Deckpunkt, so berühren alle Kegelschnitte K die Gerade Δ in d. Dieser stellt zwei zusammengefallene Grundpunkte des Büschels dar. Den Fall, dass $\{\Delta\}$ und $\{\Delta_1\}$ beide parabolisch sind, wollen wir später besonders betrachten, ihn also im Folgenden ausschliessen.

Lehrsatz 1. *Einem beliebigen Punkte a ist für alle Kegelschnitte des Büschels ein bestimmter Punkt $\mathfrak{a}$ conjugirt, oder die*

Polaren A des Punktes a für die Kegelschnitte des Büschels bilden einen Strahlenbüschel (a).

Denn die Steiner'sche Verwandtschaft, welche K, K' bestimmen, hat p zum Hauptpunkt und Δ, Δ_1 zu Deckstrahlen der Involution $\{p\}$, dieselbe ist durch K und Δ, Δ_1 bestimmt, (Kap. V, § 3, Lehrsatz 5) ändert sich also nicht, wenn an Stelle von K' irgend ein Kegelschnitt K_x des Büschels gesetzt wird.

Dem Punkte p gehört P als Polare für alle Kegelschnitte des Büschels zu. Sind $\{\Delta\}$ und $\{\Delta_1\}$ beide hyperbolisch oder elliptisch, so existiren auf P noch zwei Punkte q, r, die für alle Kegelschnitte des Büschels einander conjugirt sind. (Vgl. die Anmerkung auf Seite 84.) *$p\,q\,r$ ist ein Poldreieck, welches allen Kegelschnitten des Büschels angehört.* Seine Seiten mögen mit P, Q, R bezeichnet sein.

Berühren alle Kegelschnitte des Büschels in d die Δ, so sind q, r in d zusammengefallen, und wenn sich alle Kegelschnitte in p osculiren, so fallen in diesen auch q, r hinein.

Ist eine der Involutionen $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ elliptisch, die andere hyperbolisch, so ist das allen Kegelschnitten des Büschels conjugirte Dreieck imaginär, nur p und P sind von demselben reell. Die beiden auf P liegenden conjungirt imaginären Ecken sind die Deckpunkte der Involution $\{P\}$, welche zu irgend zweien der Polinvolutionen adjungirt ist, die zwei Kegelschnitte des Büschels auf P induciren (Kap. IV, § 2, Seite 80).

Lehrsatz 2. *Wird dem Punkte a irgend eine durch* a *gehende Gerade A als Polare zugewiesen, so ist der Kegelschnitt des Büschels dadurch vollständig bestimmt.*

Es möge $\overline{p\,a} = L$ von A in a' geschnitten werden und p' sei der Schnittpunkt von L mit P. Die durch die Paare $a\,a'$, $p\,p'$ gegebene Involution $\{L\}$ bestimmt nun mit $\{\Delta\}$ und $\{\Delta_1\}$ zusammen nach der Folgerung 1 zum Lehrsatze 1 des § 4, Kap. IV das verlangte Polarsystem. Denn für dieses muss die Polare von a durch a' und durch a gehen, daher ist sie A.

Wird a auf P angenommen, so muss A durch p gehen. Ist a' der Schnittpunkt von A mit P, so ist $a\,p\,a'$ ein Poldreieck des verlangten Polarsystems. Wird nun Δ' so be-

stimmt, dass es Δ von $\overline{p\,a}$ und $\overline{p\,a'}$ harmonisch trennt und die Involution $\{\Delta\}$ aus a oder a' auf Δ' in die Involution $\{\Delta'\}$ projicirt, so bestimmen $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ und $\{\Delta'\}$ wieder das Polarsystem. Fig. 62.

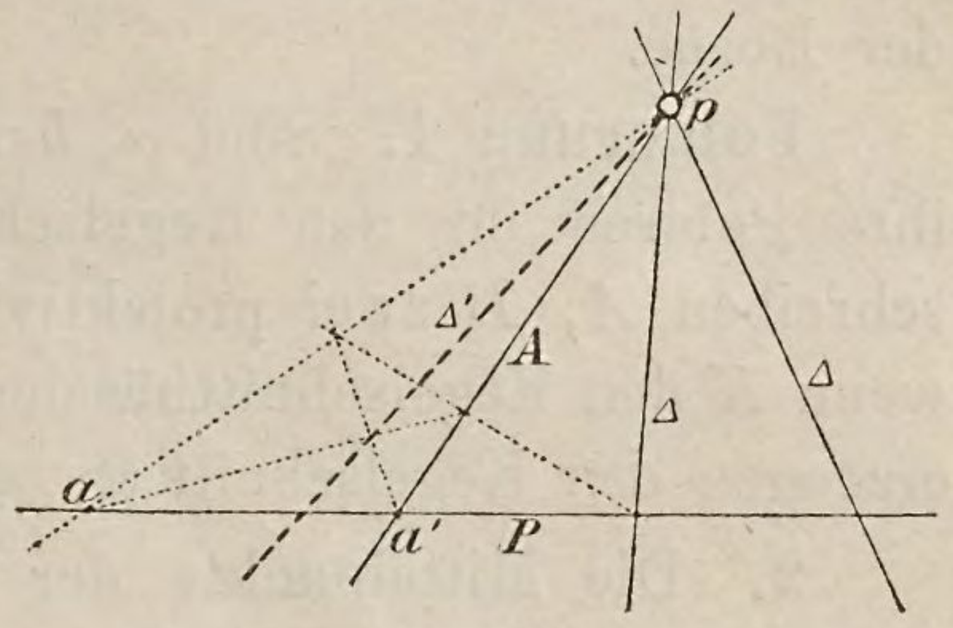


Fig. 62.

Speciell kann a als Pol von Δ gewählt werden. Man erhält in diesem Falle alle Kegelschnitte des. Büschels, wenn man a die Gerade P durchlaufen lässt, und jeden nur einmal.

Der Ordnungskegelschnitt des Polarsystems kann nur dann imaginär sein, wenn beide Involutionen $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ elliptisch sind, also das Poldreieck reell ist.

Folgerung 1. Werden einem Punkte a der Ebene der Reihe nach alle Strahlen A des Büschels $(\mathfrak{a})$ als Polaren zugewiesen, so erhält man alle Kegelschnitte des Büschels und jeden nur einmal. Die Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte des Büschels ist mithin dieselbe, wie die der Strahlen eines Strahlenbüschels.

2. Der Kegelschnitt des Büschels ist bestimmt, wenn ein Paar conjugirter Punkte a, a' desselben gegeben sind. Denn $\overline{\mathfrak{a}\,a'}$ ist die Polare von a.

3. Der Kegelschnitt K_a des Büschels, der durch a geht, berührt die Gerade $\overline{a\,\mathfrak{a}}$.

Lehrsatz 3. *Der Ort der Pole g, g', g'' .... einer festen Geraden G der Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte K, K', K'' ... des Büschels ist derjenige Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher der Geraden G in der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht.*

Denn $\mathfrak{K}$ ist das Erzeugnis der Polarenbüschel $(g) \barwedge (g')$ der Punkte a von G für K und K'. Also liegen die Pole g, g' von G für K, K' auf $\mathfrak{K}$. Da an Stelle von K' irgend ein Kegelschnitt K'' des Büschels treten kann, ohne dass sich die Steiner'sche Verwandtschaft ändert, so liegt auch der Pol g'' von G für K'' auf $\mathfrak{K}$. p ist der Pol von G für den aus Δ, Δ_1 bestehenden Kegelschnitt des Büschels, also

für alle Geraden der Ebene fest. Ebenso sind q, r die Pole für die in q und r sich schneidenden Geradenpaare, welche die Grundpunkte des Büschels enthalten, für jede Gerade der Ebene.

Folgerung 1. Sind a, b zwei Punkte der Ebene, A, B ihre Polaren für den Kegelschnitt K des Büschels, so beschreiben A, B zwei projektivische Strahlenbüschel (a), (b), wenn K den Kegelschnittbüschel durchläuft. Denn (a) $\overline{\wedge}$ (b) erzeugen den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher $\overline{ab} = G$ entspricht.

2. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_\infty$, welcher G_∞ entspricht.

Lehrsatz 4. *Die Kegelschnitte des Büschels schneiden eine Gerade G der Ebene in Punktepaaren einer Involution, welche Polinvolution von $\mathfrak{K}$ ist.*

Fig. 63. Es mögen m, n die Schnittpunkte irgend eines Kegelschnittes K des Büschels mit G sein, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die ihnen in der

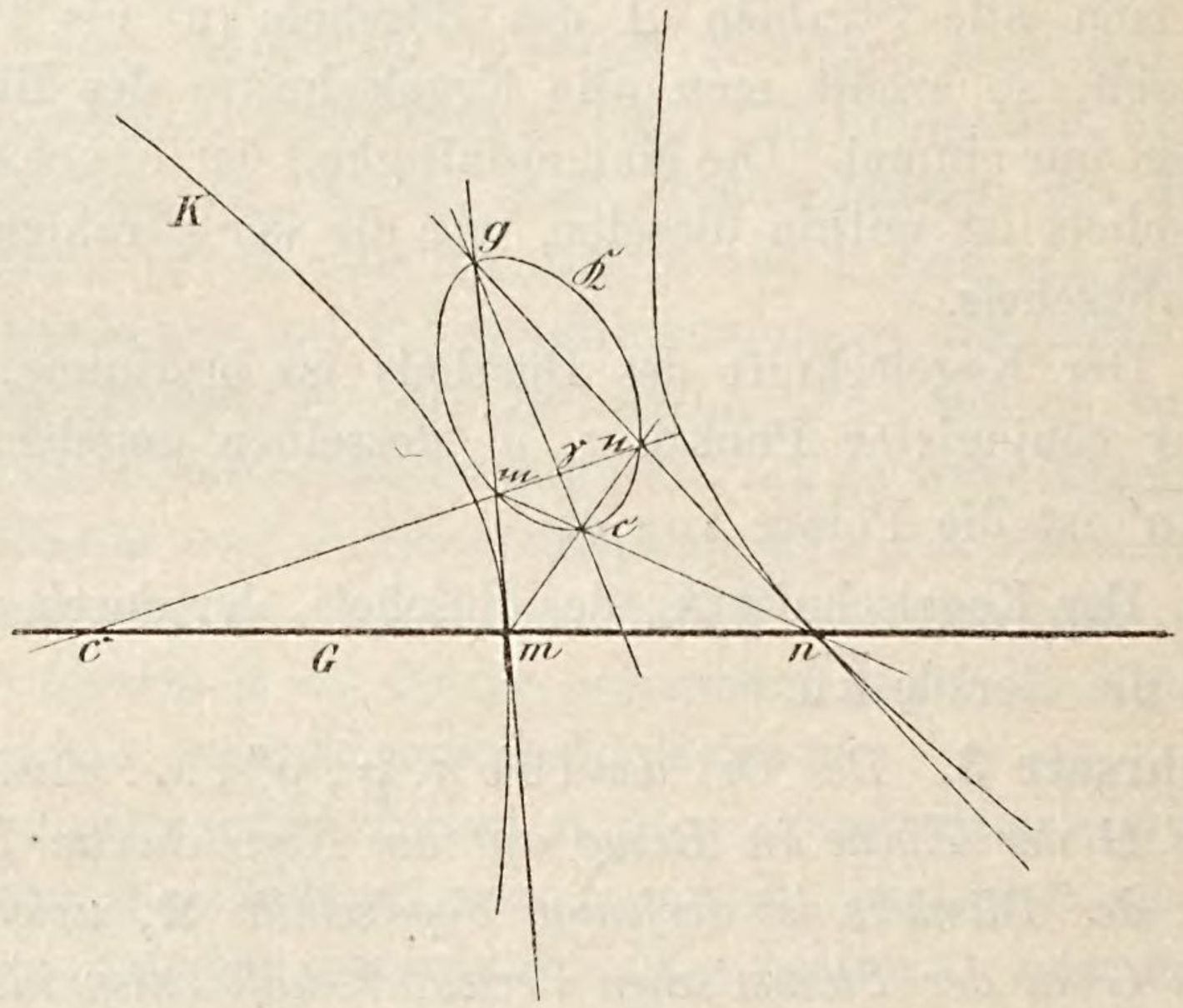


Fig. 63.

Steiner'schen Verwandtschaft entsprechenden, dann sind $\overline{m\mathfrak{m}}$ und $\overline{n\mathfrak{n}}$ Tangenten von K in m und n und ihr Schnittpunkt g ist der Pol von G für K. Wird G von $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}$ in c geschnitten und schneiden sich $\overline{m\mathfrak{n}}$ und $\overline{n\mathfrak{m}}$ in $\mathfrak{c}$, so sind c, $\mathfrak{c}$ conjugirte Pole für alle Kegelschnitte des Büschels, denn m, $\mathfrak{m}$ und n, $\mathfrak{n}$

sind solche (Kap. III, § 7, Lehrsatz 3). Die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, g, $\mathfrak{c}$ liegen mithin auf $\mathfrak{K}$ und der Schnittpunkt γ von $g\,\mathfrak{c}$ mit $\overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}}$ ist der Pol von G für $\mathfrak{K}$, also sind m, n conjugirte Pole von $\mathfrak{K}$, da sie die Projektionen von g aus $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ auf G sind (Kap. III, § 6, Folgerung 3 zu Lehrsatz 2, Seite 61).

Die Schnittpunkte von Δ und Δ_1 mit G sind auch ein Paar der Involution. Denn schneidet G die Δ in b und Δ_1 Fig. 64.

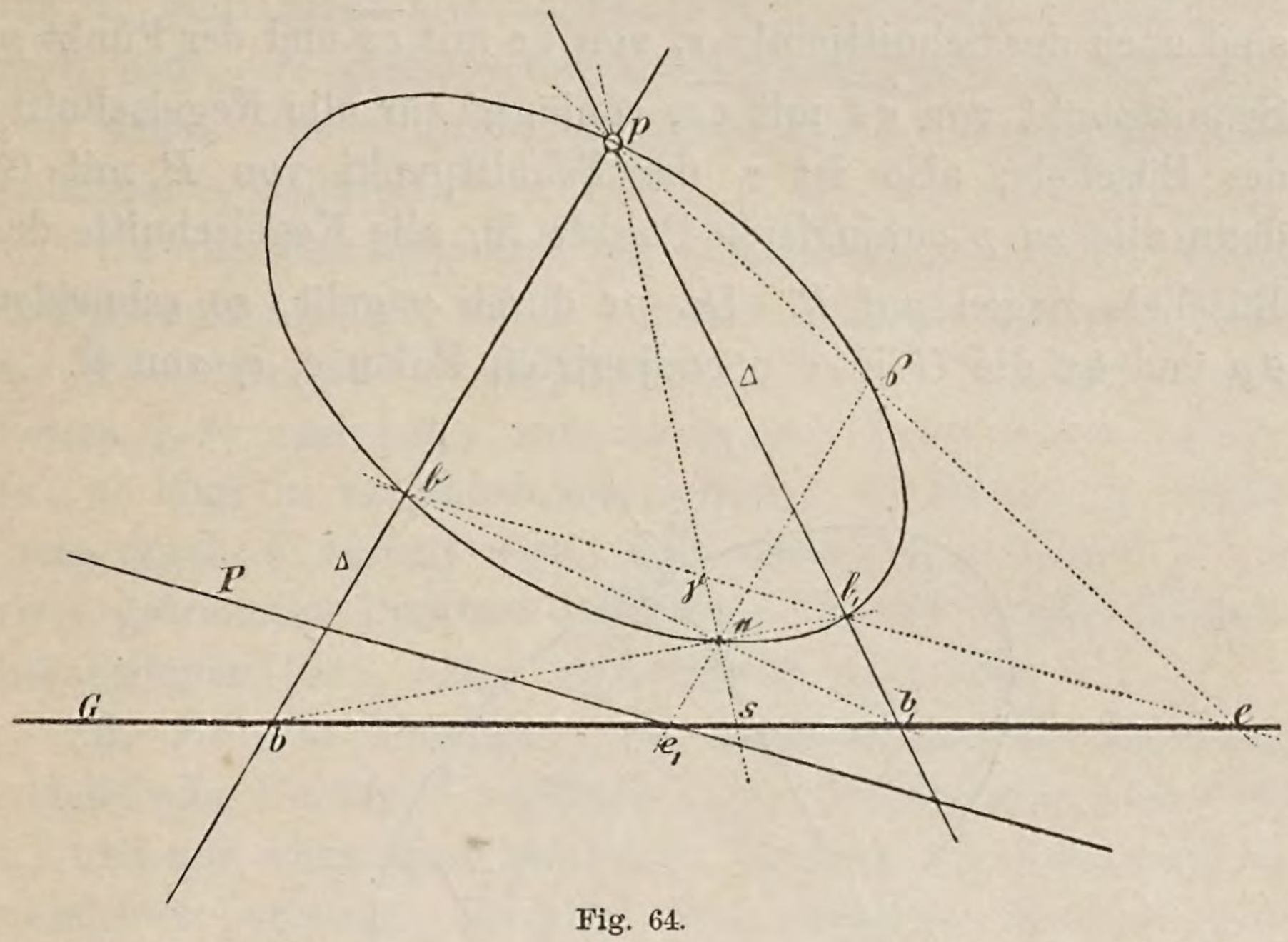


Fig. 64.

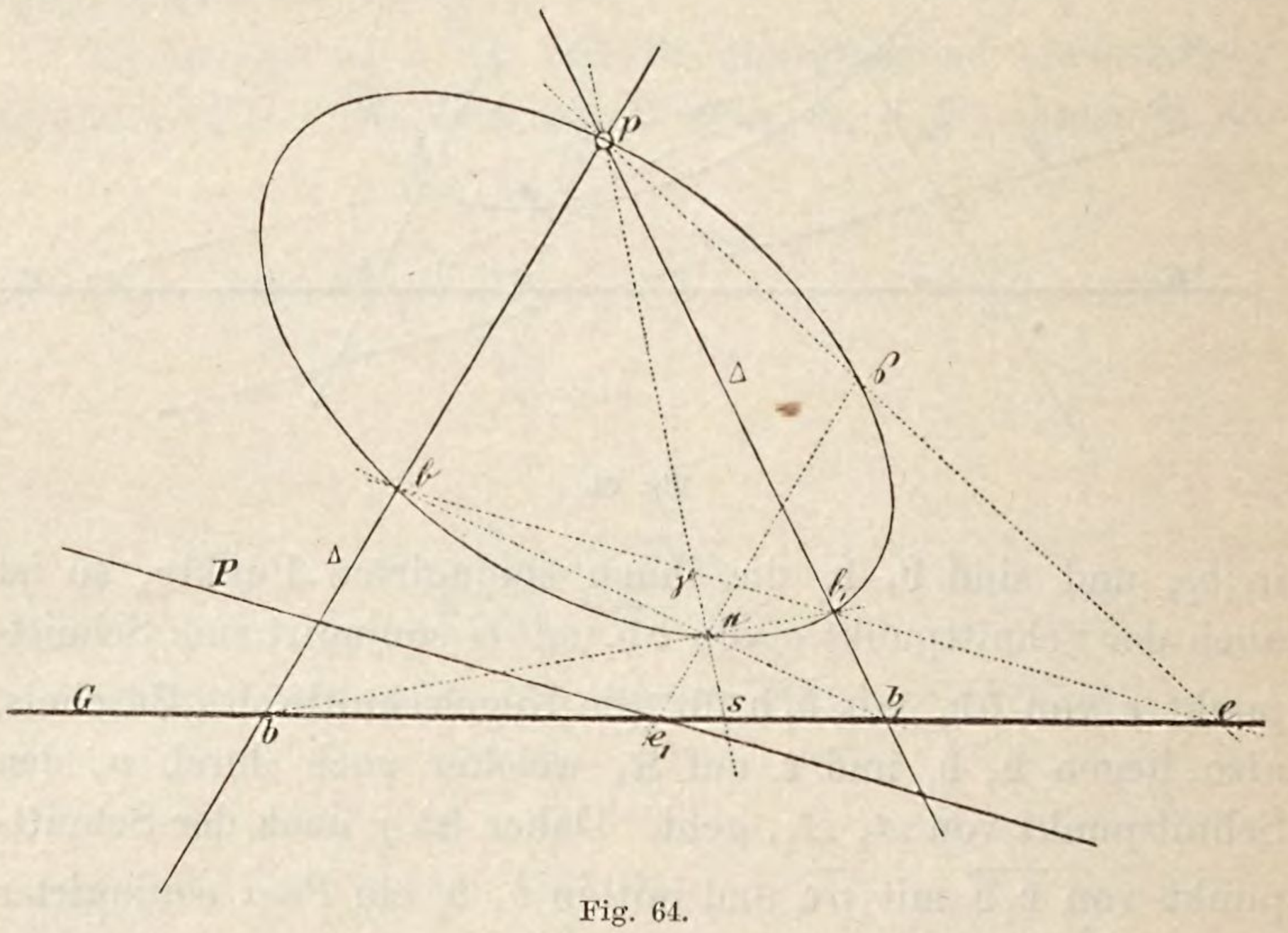
in b_1, und sind $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ die ihnen conjugirten Punkte, so ist auch der Schnittpunkt e von $\overline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1}$ mit G conjugirt zum Schnittpunkt $\mathfrak{e}$ von $\overline{b\,\mathfrak{b}_1}$ mit $\overline{b_1\,\mathfrak{b}}$ für alle Kegelschnitte des Büschels, also liegen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{e}$ auf $\mathfrak{K}$, welcher auch durch p, den Schnittpunkt von Δ, Δ_1, geht. Daher ist γ auch der Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}}$ mit $\overline{p\,\mathfrak{e}}$ und mithin b, b_1 ein Paar conjugirter Pole von $\mathfrak{K}$.

Sind beide Involutionen $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ hyperbolisch, d, δ und d_1, δ_1 ihre Deckpunkte, so schneiden auch die Geraden $\overline{d\,d_1}$, $\overline{\delta\,\delta_1}$ und $\overline{d\,\delta_1}$, $\overline{d_1\,\delta}$ je ein Paar der Involution aus, die $\mathfrak{K}$ auf G inducirt, diese ist mithin gleich durch drei ihrer Paare bestimmt (Desargue'scher Satz Kap. I, § 3, Lehrsatz 3).

Aber auch, wenn die Involutionen $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ nicht beide hyperbolisch sind, tritt auf G sogleich noch ein Paar

der Involution auf, welche die Kegelschnitte des Büschels auf derselben ausschneiden. Denn schneidet $\overline{pe}$ den $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{s}$, so liegt der zu $\mathfrak{s}$ conjugirte Punkt s notwendig im Schnittpunkte von $\overline{pe}$ mit G, denn $\overline{pe}$, $\overline{p\mathfrak{e}}$ sind ein Paar der Involution $\{p\}$ der Steiner'schen Verwandtschaft, und $\mathfrak{s}$ liegt auf $\mathfrak{K}$, sein entsprechender mithin auf G. Da nun e, $\mathfrak{e}$ und s, $\mathfrak{s}$ conjugirte Pole sind für alle Kegelschnitte des Büschels, so sind auch der Schnittpunkt e_1 von $\overline{\mathfrak{s}\mathfrak{e}}$ mit $\overline{es}$ und der Punkt p, Schnittpunkt von $\overline{e\mathfrak{s}}$ mit $\overline{\mathfrak{e}s}$, conjugirt für alle Kegelschnitte des Büschels; also ist e_1 der Schnittpunkt von P mit G, denn alle zu p conjugirten Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels liegen auf P. Da $\overline{p\mathfrak{e}}$ durch γ geht, so schneiden $\mathfrak{s}p$ und $\mathfrak{s}\mathfrak{e}$ die G in den conjugirten Polen e, e_1 von $\mathfrak{K}$.

Fig. 64.



Durch die zwei Paare $b\,b_1$ und $e\,e_1$ ist also die Involution auf G sofort bestimmt.

Sind t, $\mathfrak{t}$ die Deckpunkte der Involution auf G, also Punkte von $\mathfrak{K}$, m, n und m', n' die Schnittpunkte irgend zweier Kegelschnitte des Büschels, so trennen t, $\mathfrak{t}$ sowol m, n als m', n' harmonisch, also sind t, $\mathfrak{t}$ conjugirte Pole für K und K' oder für alle Kegelschnitte des Büschels, mithin sind

t, t einander entsprechende Punkte der Steiner'schen Verwandtschaft.

Folgerung 1. Ist die Involution, welche die Kegelschnitte des Büschels auf G ausschneiden elliptisch, so muss jeder Kegelschnitt K in zwei reellen Punkten schneiden. Denn würde irgend einer K_x die G in zwei conjungirt imaginären Punkten schneiden, so müsste das Paar t, t, welches für K_x und irgend einem zweiten K gleichzeitig conjugirt ist, reell sein, als gemeinschaftliches Paar zweier Involutionen, von denen eine elliptisch ist (Kap. IV, § 2, Folgerung 1 zu Lehrsatz 3, Seite 80).

Da die Schnittpunkte m, n und m', n' irgend zweier Kegelschnitte K, K' mit G einander trennen müssen, sobald die Involution auf G elliptisch ist, so ist von den Involutionen $\{\Delta\}$ und $\{\Delta_1\}$ *eine* notwendig hyperbolisch. Denn m', n' liegt in verschiedenen Gebieten der Ebene, in welche diese durch K zerlegt wird, also müssen sich K und K' in zwei getrennten Punkten schneiden. Es ist mithin *eine* der Involutionen $\{\Delta\}$, $\{\Delta_1\}$ hyperbolisch oder *beide*.

2. Es gibt höchstens zwei Kegelschnitte des Büschels, welche eine Gerade G berühren. Ihre Berührungspunkte sind t, t und nur wenn diese reell sind, existiren die Kegelschnitte, welche G berühren. Es gibt dann auch stets Kegelschnitte des Büschels, welche G nicht reell schneiden.

Sind t, t conjungirt imaginär, so existirt kein Kegelschnitt des Büschels mit reellem Polarsystem, der G berühren würde.

Aus der Bemerkung in 1. folgt, dass wenn $\{\Delta\}$ und $\{\Delta_1\}$ elliptisch sind, jede Gerade der Ebene von zwei reellen Kegelschnitten des Büschels berührt wird, indem dann t, t stets reell sein müssen.

Zusatz 1. Ist der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{K}_\infty$ des Büschels eine Ellipse, so enthält der Büschel nur Hyperbeln. Tritt im Büschel eine Ellipse auf, so ist $\mathfrak{K}_\infty$ eine Hyperbel; es treten dann unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln auf und zwei Parabeln, welche die Asymptoten von $\mathfrak{K}_\infty$ zu Axenrichtungen haben. $\mathfrak{K}_\infty$ kann nur eine Parabel sein, wenn ein Basispunkt des Büschels im Unendlichen liegt.

Enthält der Büschel einen Kreis, so ist $\mathfrak{K}_\infty$ eine gleichseitige Hyperbel, denn ihre Asymptotenrichtungen sind conjugirte Pole für den Kreis.

Ist $\mathfrak{K}_\infty$ selbst ein Kreis, so enthält der Büschel lauter gleichseitige Hyperbeln, indem die Schnittpunkte der Hyperbeln auf M_∞ conjugirte Pole für den Kreis sein müssen.

Enthält der Büschel zwei Kreise, so ist er ein Kreisbüschel, alle seine Kegelschnitte sind Kreise und ihre Mittelpunkte liegen auf einer Geraden, die senkrecht steht zu der Geraden Δ, welche die im Endlichen liegenden reellen oder imaginären Basispunkte des Büschels trägt. Δ heisst *Chordale* des Kreisbüschels. Die andern zwei Basispunkte sind die Deckpunkte der circularen Involution auf G_∞ und heissen *die imaginären Kreispunkte* der Ebene. Ein Kreisbüschel ist durch zwei seiner Basispunkte reell, oder conjungirt imaginär, bestimmt.

2. Man kann häufig den Kreisbüschel zur Vervollständigung der Involution mit Vortheil benützen. Sind auf einer Geraden G zwei Punktepaare aa' und bb' gegeben und sollen beliebige Paare der durch sie bestimmten Involution $\{G\}$ construirt werden, so lege man durch a, a' irgend einen Kreis K und durch b, b' einen Kreis K', der K in zwei Punkten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ schneidet, dann schneidet jeder Kreis K'' durch $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ die G in einem Paare der Involution $\{G\}$. Die Kreise, welche G berühren, bestimmen die Deckpunkte der Involution. Sie sind die Schnittpunkte des Kreises, dessen Mittelpunkt o, der Schnittpunkt der Chordale $\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}$ mit G, ist, und der K, also auch K', K'' ... orthogonal schneidet. o ist Mittelpunkt der Involution.

Fig. 65. Ist $\{G\}$ elliptisch, so kann man K und K' über $a \,.\, a'$ resp. $b \,.\, b'$ als Durchmesser beschreiben, dann steht $\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{h}} = \mathfrak{G}$ senkrecht zu G, und der Kreisbüschel hat seine Mittelpunkte auf G. Projicirt man aus einem beliebigen Punkte x von K die Punkte a, a' auf $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, so durchlaufen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ auf $\mathfrak{G}$ eine Involution $\{\mathfrak{G}\}$, während x den K beschreibt, deren Deckpunkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sind (Kap. III, § 6, Folgerung 3 zu Lehrsatz 2).

Dieselbe Involution $\{\mathfrak{G}\}$ muss man erhalten, wenn an

Stelle von K irgend ein Kreis K' genommen wird, oder schneidet $\overline{\mathfrak{a}b}$ den K' in y, so geht $\overline{yb'}$ durch $\mathfrak{a}'$.

Beschreibt man über $\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'$ als Durchmesser den Kreis $\mathfrak{K}$, so muss dieser sowol durch x als durch y gehen, wegen der rechten Winkel an diesen Punkten. Da für diesen Kreis $\mathfrak{K}$ die Geraden $\mathfrak{G}$ und G conjugirte Polaren sind [der Pol von $\mathfrak{G}$ liegt im Unendlichen senkrecht zu $\mathfrak{G}$], so geben die Projektionen von x und y aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ auf G je ein Paar conjugirter Pole von $\mathfrak{K}$ auf G d. h. der Kreis $\mathfrak{K}$ hat auf G die

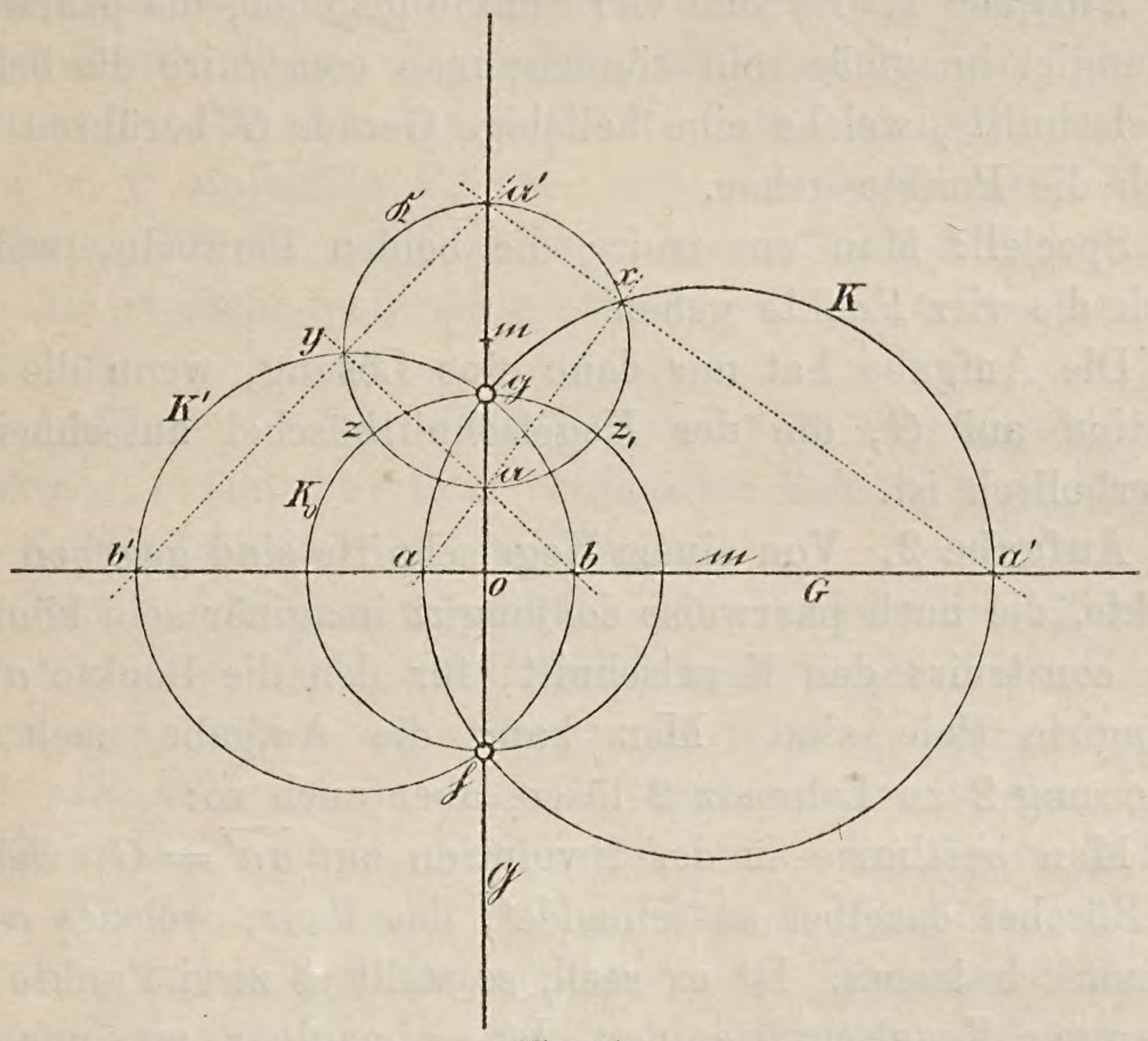


Fig. 65.

Polinvolution $\{G\}$. Daher bilden alle Kreise $\mathfrak{K}$ einen Büschel, dessen Basispunkte die conjungirt imaginären Deckpunkte der elliptischen Involution $\{G\}$ sind.

Da $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ die Deckpunkte der Involution $\{\mathfrak{G}\}$ sind, deren Mittelpunkt o ist, so folgt

$$\overline{o\,\mathfrak{g}}^2 = o\,\mathfrak{a}\,.\,o\,\mathfrak{a}'$$

d. h. der Kreis K_o, welcher mit $o\mathfrak{g}$ beschrieben ist, schneidet $\mathfrak{K}$ orthogonal in z und z_1. Ist $\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$, so wird daher auch

$$\overline{\mathfrak{m}\,z}^2 = \mathfrak{m}\,\mathfrak{g}\,.\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{h}$$

d. h. der Kreis $\mathfrak{K}$ schneidet alle Kreise K, K', K'' ..., die durch $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ gehen, orthogonal.

Mithin schneidet jeder Kreis $\mathfrak{K}$ jeden Kreis K orthogonal. Solche zwei Kreisbüschel werden *conjugirte* Kreisbüschel genannt. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kreis des einen Büschels und einer des zweiten Büschels, die einander orthogonal schneiden.

Man sieht, wie man irgend einen Kreis K dazu verwenden kann, die hyperbolische Involution auf $\mathfrak{G}$ zu vervollständigen.

Aufgabe 1. Es sind vier Punkte gegeben, die paarweise conjungirt imaginär sein können; man construire die beiden Kegelschnitte, welche eine beliebige Gerade G berühren und durch die Punkte gehen.

Speciell: Man construire die beiden Parabeln, welche durch die vier Punkte gehen.

Die Aufgabe hat nur dann eine Lösung, wenn die Involution auf G, die der Kegelschnittbüschel ausschneidet, hyperbolisch ist.

Aufgabe 2. Von einem Kegelschnitte sind gegeben vier Punkte, die auch paarweise conjungirt imaginär sein können, man construire den Kegelschnitt, für den die Punkte a, a' conjugirte Pole sind. Man kann die Aufgabe nach der Folgerung 2 zu Lehrsatz 2 lösen, aber auch so:

Man bestimme in der Involution auf $\overline{aa'} = G$, welche der Büschel daselbst ausschneidet, das Paar, welches a, a' harmonisch trennt. Ist es reell, so stellt es zwei Punkte des verlangten Kegelschnittes dar. Ist es imaginär, was nur eintreten kann, wenn t, $\mathfrak{t}$ reell sind, so stellen t, $\mathfrak{t}$ und a, a' zwei Paare conjugirter Pole des zu construirenden Kegelschnittes auf G dar, wodurch seine Polinvolution auf G bekannt, und dieser mithin construirbar ist. Er kann natürlich imaginär werden, sein Polarsystem ist aber reell und bestimmt.

Lehrsatz 5. *Die Kegelschnitte, welche durch drei Punkte a, b, c gehen und die Paare m, $\mathfrak{m}$; n, $\mathfrak{n}$, ... einer Involution $\{G\}$ auf der Geraden G enthalten, bilden einen Büschel.*

Denn legt man K durch a, b, c, m, $\mathfrak{m}$, und K' durch a, b, c, n, $\mathfrak{n}$, so haben beide Kegelschnitte drei Schnittpunkte a, b, c, also noch einen d. Der Büschel durch a, b, c, d

schneidet G in der Involution $\{G\}$. Von den drei Punkten a, b, c können zwei auch conjungirt imaginär sein.

Aufgabe 3. Es sind drei Punkte a, b, c gegeben; man bestimme den Kegelschnitt, der durch dieselben geht, und für den die weiter gegebenen zwei Punktepaare x, $\mathfrak{x}$ und y, $\mathfrak{y}$ conjugirte Pole sind. Liegen x, $\mathfrak{x}$ und y, $\mathfrak{y}$ auf einer Geraden, so ist auf dieser die Polinvolution gegeben, also der Kegelschnitt nach Kap. IV, § 1, Aufgabe 3, Seite 70 bestimmt. Anderenfalls lege man durch a, b, c und irgend zwei Punktepaare, welche x, $\mathfrak{x}$ auf $\overline{x\,\mathfrak{x}} = G$ harmonisch trennen, zwei Kegelschnitte K und K', welche sich noch in dem Punkte d schneiden. Für den durch K, K' bestimmten Büschel sind dann x, $\mathfrak{x}$ conjugirte Punkte, und der Kegelschnitt K_o ist bestimmt, für den y, $\mathfrak{y}$ conjugirt sein sollen (Aufgabe 2).

K_o ist stets reell, da ein Punkt von den gegebenen reell sein muss.

Aufgabe 4. Von einem Kegelschnitte sind gegeben zwei Punkte a, b und drei Paar conjugirter Pole x, $\mathfrak{x}$; y, $\mathfrak{y}$; z, $\mathfrak{z}$; der Kegelschnitt ist zu construiren.

Man nehme einen willkürlichen Punkt c der Ebene an und construire nach der Aufgabe 3 den Kegelschnitt K_o, der durch a, b, c geht und für den x, $\mathfrak{x}$; y, $\mathfrak{y}$ conjugirte Pole sind. Dasselbe mache man für einen zweiten Punkt c', wodurch man K_o' erhält. Die Kegelschnitte K_o, K_o' bestimmen einen Büschel, zu dessen Basispunkten a, b gehören, und für den x, $\mathfrak{x}$ und y, $\mathfrak{y}$ conjugirte Pole sind. Der Kegelschnitt K dieses Büschels, für den noch z, $\mathfrak{z}$ conjugirt sind, ist nach der Aufgabe 2 zu construiren. Dieser Kegelschnitt kann nur dann imaginär sein, wenn a, b conjungirt imaginär sind.

Aufgabe 5. Von einem Kegelschnitte sind gegeben ein Punkt a und vier Paar conjugirter Pole x, $\mathfrak{x}$; y, $\mathfrak{y}$; z, $\mathfrak{z}$; t, $\mathfrak{t}$; derselbe ist zu construiren.

Man nehme einen willkürlichen Punkt b an und construire nach Aufgabe 4 den Kegelschnitt K, der x, $\mathfrak{x}$; y, $\mathfrak{y}$; z, $\mathfrak{z}$ zu conjugirten Polen hat, und für einen zweiten Punkt b' den Kegelschnitt K′, der dieselben conjugirten Pole hat. K, K′ bestimmen dann einen Büschel, in welchem der Kegelschnitt bestimmt ist, der t, $\mathfrak{t}$ zu conjugirten Polen besitzt.

Anmerkung. Ein Kegelschnittbüschel ist bestimmt, wenn vier Paar conjugirter Pole x, $\mathfrak{x}$; y, $\mathfrak{y}$; z, $\mathfrak{z}$; t, $\mathfrak{t}$ gegeben sind.

Aufgabe 6. Von einem Kegelschnitte sind gegeben fünf Paar conjugirter Pole x, $\mathfrak{x}$; y, $\mathfrak{y}$; z, $\mathfrak{z}$; t, $\mathfrak{t}$; v, $\mathfrak{v}$, derselbe ist zu construiren. Man construire die zwei Kegelschnitte K_a und K_b, welche durch a und b nach Aufgabe 5 gehen; in dem durch sie bestimmten Büschel ist dann der Kegelschnitt nach Aufgabe 2 bestimmt, für den v, $\mathfrak{v}$ conjugirte Pole sind.

Die Aufgaben 3, 4, 5, 6 zeigen, dass durch die Angaben der Kegelschnitt vollständig bestimmt ist. Nur dürfen in den Aufgaben 4, 5, 6 nicht drei oder mehr der gegebenen Paare auf einer und derselben Geraden liegen.

Zusatz. Die Kreise, welche durch einen Punkt $\mathfrak{g}$ gehen und die Paare aa', bb', ... einer Involution auf der Geraden G enthalten, bilden einen Büschel und gehen noch durch einen festen Punkt $\mathfrak{h}$. Die Gerade $\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}$ geht durch den Mittelpunkt der Involution.

§ 2. Die Kegelschnittschaar.

Die Gesammtheit der Kegelschnitte, welche in zwei Punkten $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$ dieselben Polareninvolutionen $\{\mathfrak{D}\}$, $\{\mathfrak{D}_1\}$ haben, heisst *Kegelschnittschaar*. Sind die Involutionen $\{\mathfrak{D}\}$ und $\{\mathfrak{D}_1\}$ hyperbolisch, so berühren alle Kegelschnitte der Schaar ihre Deckstrahlen.

Nach Kapitel IV, § 1, Aufgabe 5, Seite 78 existirt stets ein bestimmter Kegelschnitt der Schaar, welcher eine beliebige Gerade A der Ebene berührt.

Die Polarfiguren sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar in Bezug auf einen festen Kegelschnitt K bilden einen Büschel und hiernach lassen sich die in § 1 bewiesenen Sätze und construirten Aufgaben für die Schaar ohne Weiteres anwenden.

Man erhält der Reihe nach:

Lehrsatz 1. *Die Pole a einer Geraden A für alle Kegelschnitte der Schaar liegen auf einer Geraden* $\mathfrak{A}$.

Lehrsatz 2. *Wird der Geraden A ein auf* $\mathfrak{A}$ *liegender Punkt a als Pol zugewiesen, so ist der Kegelschnitt der Schaar vollständig bestimmt.*

Lehrsatz 3. *Die Polaren G, G', G'' eines festen Punktes g der Ebene in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar hüllen einen Kegelschnitt ein.*

Lehrsatz 4. *Zieht man von einem Punkte g die Tangentenpaare an die Kegelschnitte der Schaar, so bilden diese eine Involution in g. Von dieser sind $\overline{g\,\mathfrak{D}}$ und $\overline{g\,\mathfrak{D}_1}$ stets ein Paar.*

Folgerung 1. Sind die Involutionen $\{\mathfrak{D}\}$ und $\{\mathfrak{D}_1\}$ hyperbolisch, so schneiden sich ihre Deckstrahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ noch in weiteren vier Punkten u. z. $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1$ in ε und $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}$ in ε_1, und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ in ξ und $\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}_1$ in ξ_1, und es sind $\overline{g\,\varepsilon}$ und $\overline{g\,\varepsilon_1}$, sowie $\overline{g\,\xi}$ und $\overline{g\,\xi_1}$ auch je ein Paar der obigen Involutionen oder:

Projicirt man die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ aus einem Punkte g, so erhält man drei Paar Strahlen einer Strahleninvolution. (Dieser Satz ist der duale zum Satze von Desargues Kap. I, § 3.)

2. Durch einen Punkt der Ebene gehen höchstens zwei Kegelschnitte der Schaar. Sie berühren die Deckstrahlen der Involution in g. Dieselben sind stets reell, sobald $\{\mathfrak{D}\}$ und $\{\mathfrak{D}_1\}$ beide elliptisch sind, wobei dann wenigstens einer derselben eine Hyperbel sein muss (Kap. V., § 1 δ), Seite 125).

§ 3. Kegelschnitte in doppelter Berührung.

Sind von einem Kegelschnitte gegeben ein Paar Tangenten und ihre Berührungspunkte, so geht durch jeden Punkt der Ebene ein bestimmter Kegelschnitt und ebenso berührt jede Gerade der Ebene ein solcher. Die Kegelschnitte stellen sowol einen Kegelschnittbüschel, als eine Kegelschnittschaar dar. Die Grundpunkte des Büschels sind ebenso wie die Grundtangenten der Schaar paarweise zusammengefallen.

Sei c der Pol der gemeinschaftlichen Berührungssehne C und $\{c\}$ resp. $\{C\}$ die allen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Polaren- resp. Polinvolutionen und K, K', K'', ... die Kegelschnitte des Büschels.

Lehrsatz 1. *Die Pole g, g', g'' ... einer beliebigen Geraden G für alle Kegelschnitte dieses Büschels K, K', K'' ... liegen auf einer festen Geraden A, die durch c geht und in der Involution $\{c\}$ der Geraden A' conjugirt ist, welche den Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ von G mit C enthält.* Fig. 66.

Denn da A Polare des Punktes $\mathfrak{a}$ für alle Kegelschnitte ist, so muss der Pol jeder Geraden G durch $\mathfrak{a}$ für irgend einen der Kegelschnitte auf A liegen.

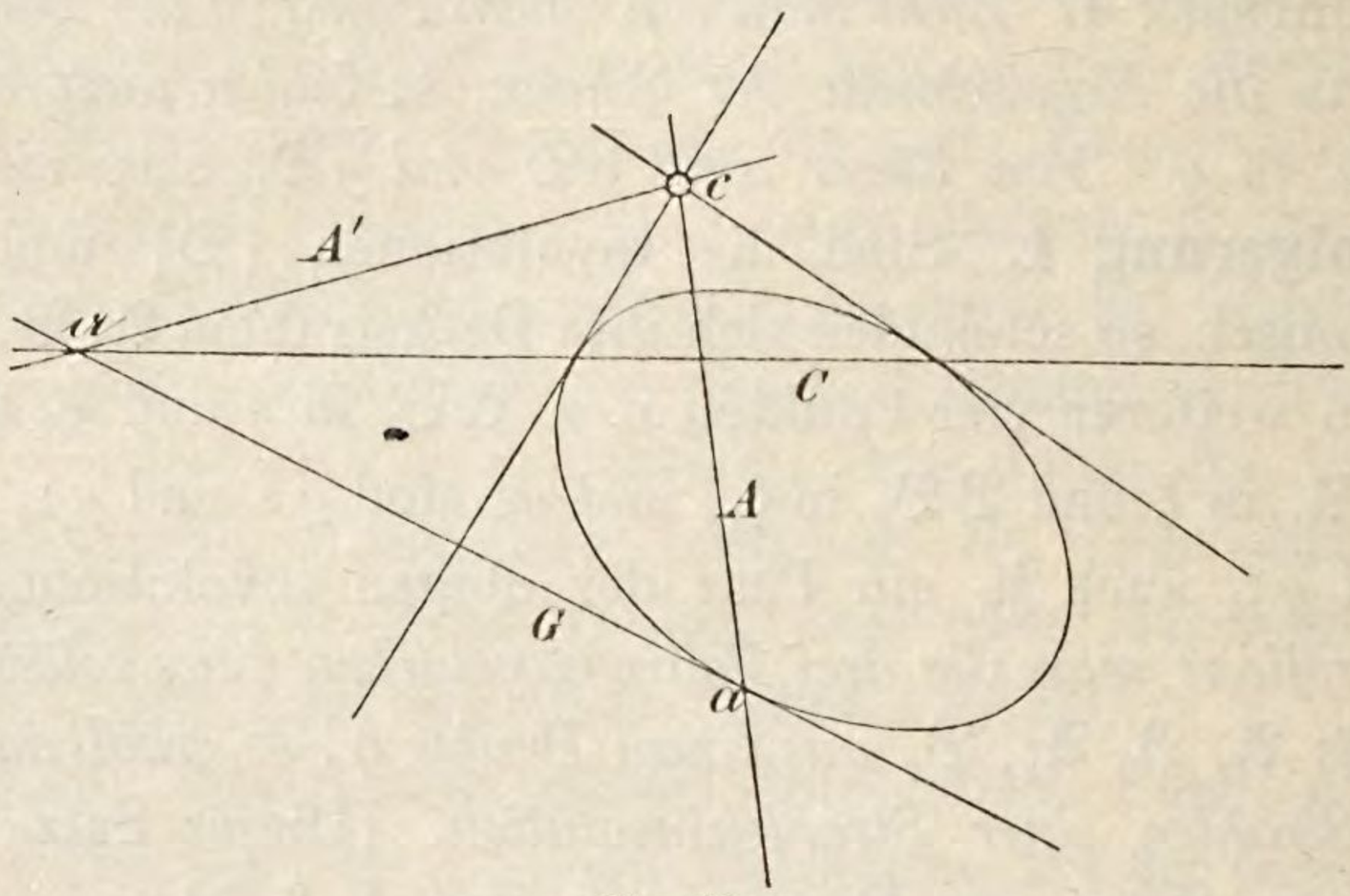


Fig. 66.

Im Schnittpunkte a von A mit G berührt ein Kegelschnitt des Büschels die G.

Geht G durch c, so hat dieselbe für alle Kegelschnitte denselben Pol g auf C und cg ist zu G conjugirt in $\{c\}$.

Lehrsatz 2. *Die Polaren eines beliebigen Punktes a in Bezug auf die Kegelschnitte dieses Büschels gehen durch einen festen Punkt $\mathfrak{a}$ von C. Die Strahlen $\overline{ca} = A$ und $\overline{c\mathfrak{a}} = A'$ sind conjugirt in $\{c\}$.*

Denn da $\mathfrak{a}$ Pol von A für alle Kegelschnitte des Büschels ist, so geht die Polare von a, eines Punktes von A, für alle Kegelschnitte durch $\mathfrak{a}$.

Der Kegelschnitt, welcher durch a geht, hat $\overline{a\mathfrak{a}} = G$ zur Tangente.

Lehrsatz 3. *Die Kegelschnitte dieses Büschels schneiden eine beliebige Gerade G der Ebene in Punktepaaren einer Involution, deren ein Deckpunkt $\mathfrak{a}$, der Schnittpunkt von G mit C, ist, der andere ist a, der Schnittpunkt von G mit dem Strahle A von $\{c\}$, welcher zu $\overline{c\mathfrak{a}} = A'$ in $\{c\}$ conjugirt ist.*

Denn da a, $\mathfrak{a}$ für alle Kegelschnitte des Büschels conjugirte Pole sind, so müssen die Schnittpunkte derselben mit G die Punkte a, $\mathfrak{a}$ harmonisch trennen.

Lehrsatz 4. *Zieht man von einem Punkte a an alle*

Kegelschnitte die Tangentenpaare, so bilden diese eine Involution, deren Deckstrahlen $\overline{ac}$ *und* $\overline{a\mathfrak{a}}$ *sind.*

Denn da für jeden Kegelschnitt $\mathfrak{a}$ Pol von $\overline{ca} = A$ ist, so sind $\overline{ac}$ und $\overline{a\mathfrak{a}}$ conjugirte Polaren für denselben und die Tangenten müssen diese Geraden harmonisch trennen.

Anmerkung. Concentrische Kreise bilden einen derartigen Büschel.

Aufgabe 1. Von einem Kegelschnitte K sind gegeben zwei Tangenten mit den Berührungspunkten und ein Paar conjugirter Punkte x, $\mathfrak{x}$; derselbe ist zu construiren.

Es sei c der Schnittpunkt der Tangenten, $\{c\}$ die durch sie bestimmte Involution conjugirter Polaren, C die Polare von c für K, und $\{C\}$ die Involution conjugirter Pole auf C, also der Schnitt von $\{c\}$. Schneidet $\overline{x\mathfrak{x}} = G$ die C in $\mathfrak{a}$, und ist A zu $\overline{c\mathfrak{a}} = A'$ in $\{c\}$ conjugirt, so ist A Polare Fig. 67.

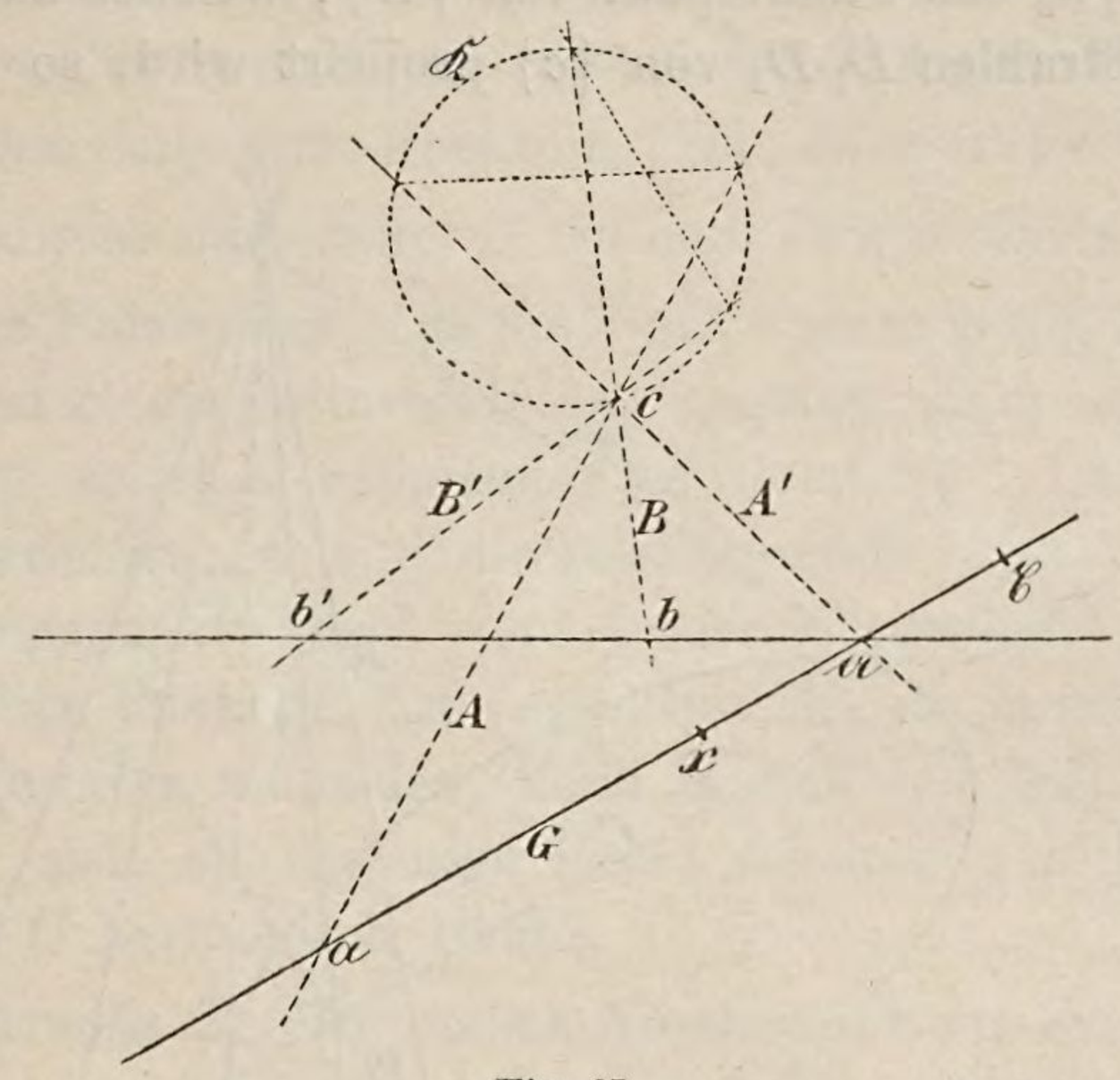


Fig. 67.

von $\mathfrak{a}$ für K, schneidet daher G in dem Punkte a, welcher conjugirter Pol zu $\mathfrak{a}$ ist. Durch a, $\mathfrak{a}$ und x, $\mathfrak{x}$ ist daher die Involution conjugirter Pole $\{G\}$ auf G bestimmt, mithin auch K, da von demselben $\{G\}$, $\{C\}$ und der Pol c von C gegeben sind. (Lehrsatz 2 des § 1.)

Aufgabe 2. Von einem Kegelschnitte K sind gegeben zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und ein Paar

conjugirter Polaren X, X'; derselbe ist zu construiren. Die Aufgabe ist die duale zu 1.

Lehrsatz 5. *Die Kegelschnitte, welche in einem Punkte c eine bestimmte Polareninvolution $\{c\}$ und auf einer Geraden B eine gegebene Polinvolution $\{B\}$ haben, bilden ein System von Kegelschnitten derart, dass die Pole b der Geraden B zwei gerade Gebilde D_1 und D_2 erfüllen, welchen der Punkt c angehört, oder auch die Polaren von c beschreiben zwei Büschel (d_1) und (d_2), deren Scheitel auf B liegen. Die Geraden D_1, D_2 gehen durch d_1 und d_2 und sind in $\{c\}$ conjugirt, während d_1, d_2 in $\{B\}$ einander entsprechen. Ein Kegelschnitt des Systems ist vollständig bestimmt, sobald der Pol b von B auf D_1 oder D_2 willkürlich angenommen wird, oder dem Punkte c irgend eine durch d_1 oder d_2 gehende Gerade als Polare zugewiesen wird.*

Fig. 68. Sei $d_1 d_2$ das Punktepaar von $\{B\}$, welches aus c durch ein Paar Strahlen $D_1 D_2$ von $\{c\}$ projicirt wird, so ist dieses

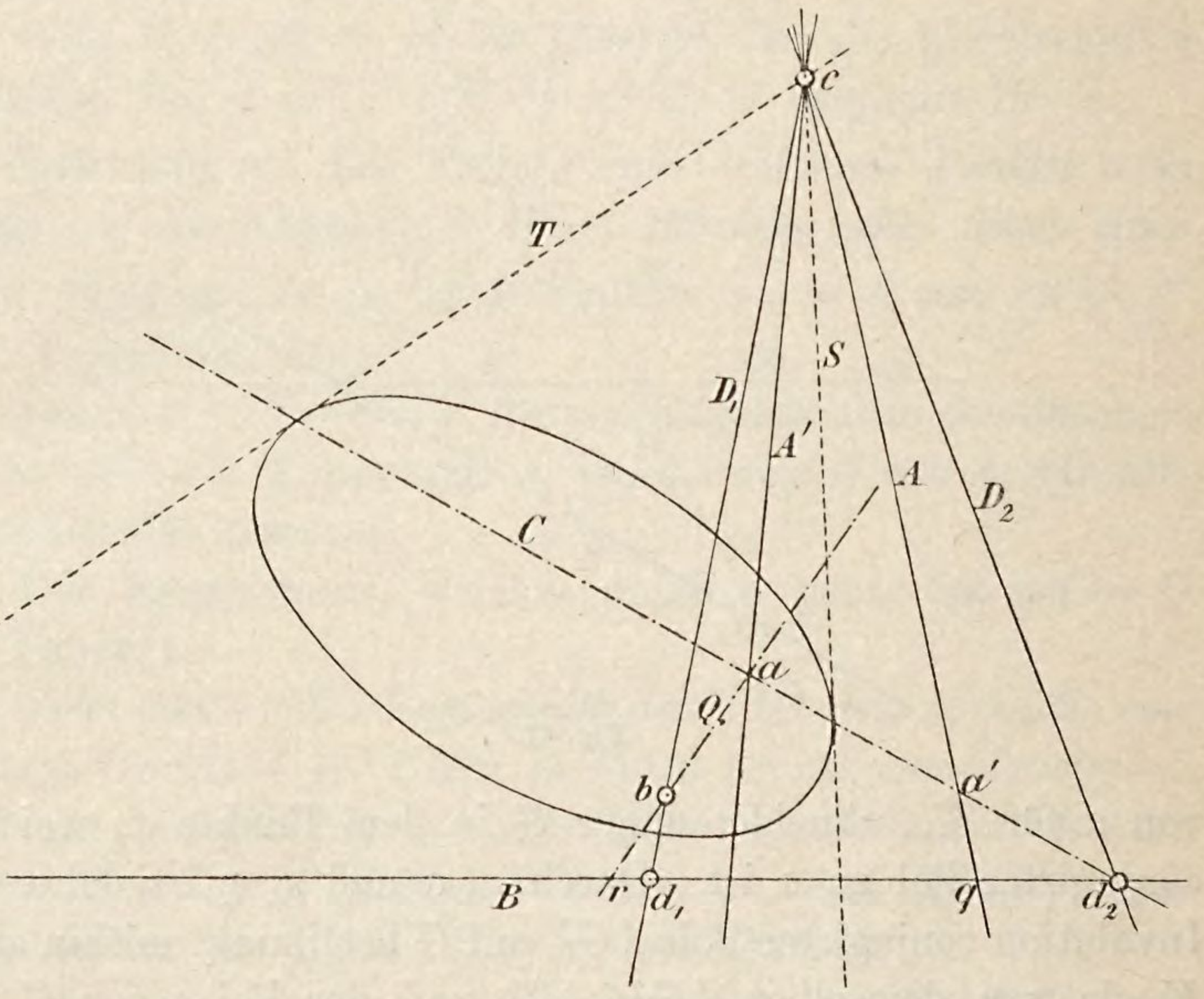


Fig. 68.

nur dann imaginär, wenn sowol $\{c\}$ als $\{C\}$ hyperbolisch sind, und die Schnittpunkte der Deckstrahlen T, S von $\{c\}$

die Deckpunkte u, v von $\{B\}$ trennen. In diesem Falle kann kein Kegelschnitt existiren, der ein reelles Polarsystem hat und den gestellten Bedingungen genügt. Denn der Kegelschnitt, welcher T, S berührt und durch u geht, muss ganz in dem einen Winkelraume und eventuell seinem Scheitelraume verlaufen, in dem u liegt, kann also keinen Punkt v im Nebenraume haben. Sollen also überhaupt Kegelschnitte existiren, so dürfen u, v die S, T nicht trennen.

Ist nun K irgend ein Kegelschnitt, der den gestellten Bedingungen genügt, so muss, wenn C die Polare von c ist, der Schnittpunkt d von B mit C die Polare D haben, welche zu $\overline{cd}$ in $\{c\}$ conjugirt ist und B in dem Punkte d' schneidet, der d in $\{B\}$ entspricht. d, d' sind also die obigen Punkte d_1, d_2.

Wird nun b beliebig, etwa auf D_1, als Pol von B angenommen, und ist A eine beliebige durch c gehende Gerade, A' die conjugirte Polare zu A, so möge A die B in q schneiden und r sei der ihm conjugirte Punkt in $\{B\}$, dann ist $\overline{br} = Q$ Polare von q und schneidet daher A' in dem Pole a von A. $\overline{d_2 a} = C$ ist mithin Polare von c, da $\overline{b d_1} = D_1$ Polare von d_2 ist. Da nun auf C und B die Polinvolutionen gegeben sind, und c der Pol von C ist, so ist K vollständig bestimmt. (§ 1, Lehrs. 2.) Ist $\{c\}$ hyperbolisch, so sind die Schnittpunkte von C mit S, T die Berührungspunkte von K, und A oder A' schneidet ebenfalls in zwei reellen Punkten. Ist $\{c\}$ elliptisch, so muss D_1 in zwei reellen Punkten schneiden, wenn K reell sein soll. Diese bestimmen sich als dasjenige Paar, welches b, B und gleichzeitig c, C harmonisch trennt.

Lehrsatz 2. *Die reellen Kegelschnitte des Systems, welche ihre Pole b von B auf D_1 haben, sind alle Collinearfiguren eines, K_0, von ihnen für c als Collineatscentrum und B als Collineationsaxe. Dasselbe gilt für die Kegelschnitte, die ihre Pole von B auf D_2 liegen haben.*

Denn sei K_0 einer dieser Kegelschnitte, b_0 sein Pol von B auf D_1 gelegen und K ein anderer, dessen Pol b ebenfalls auf D_1 liegt. Bestimmt man nun eine centrale Collineation, deren Centrum c und Axe B ist, und in der b_0 und b ent-

sprechende Punkte sind, so wird dem Kegelschnitte K_0 ein Kegelschnitt K' entsprechen, der in c die Involution conjugirter Polaren $\{c\}$ und auf B die Polinvolution $\{B\}$ besitzt und b zum Pol von B hat, also mit K identisch ist.

Die imaginären Kegelschnitte sind ebenfalls Collinearfiguren unter einander.

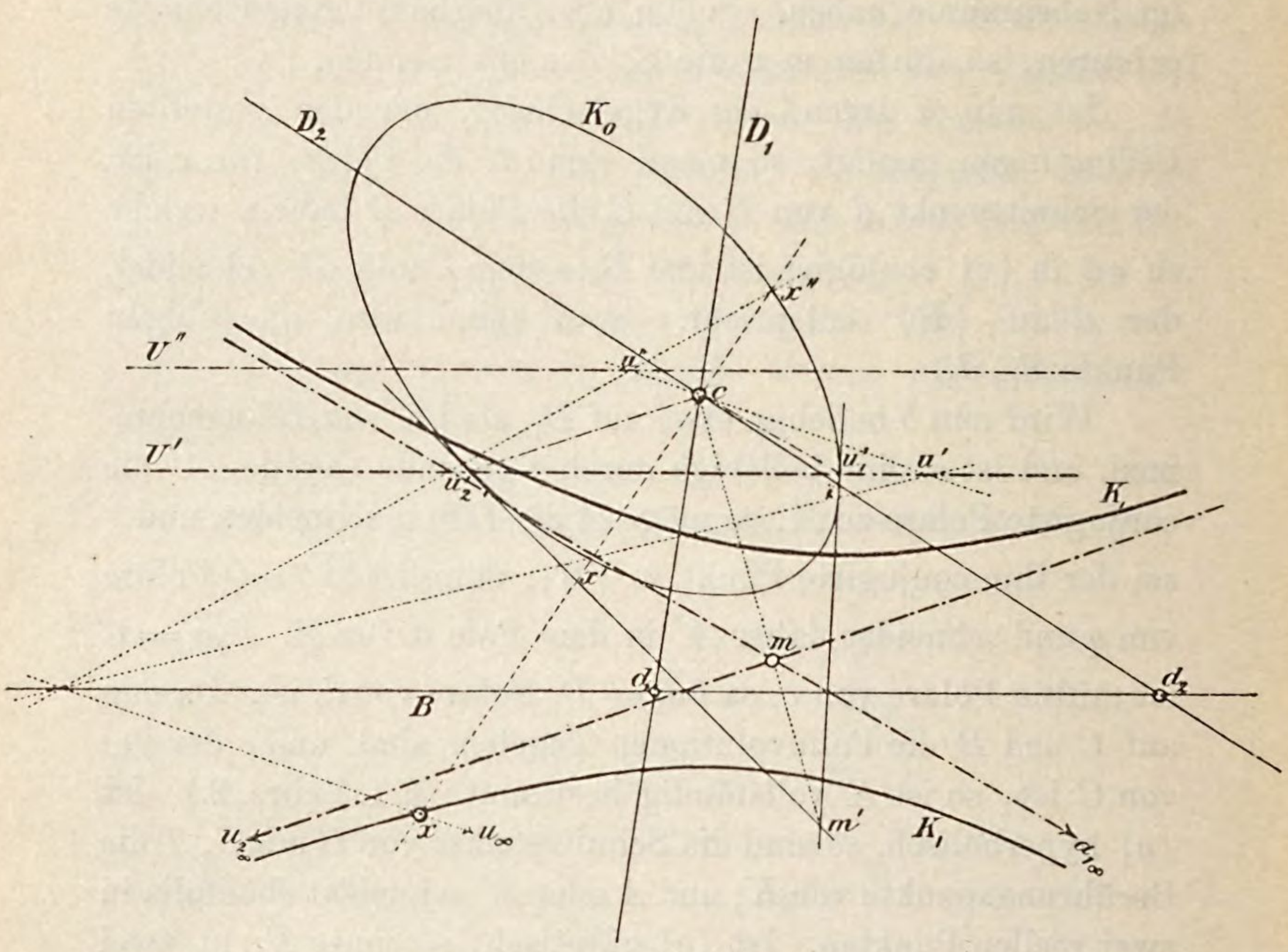


Fig. 69.

Aufgabe 1. Die Kegelschnitte des Systems sind zu construiren, welche durch einen Punkt x der Ebene gehen.

Fig. 69. Es sei einer der Kegelschnitte K_0 des Systems construirt und $\overline{cx}$ schneide K_0 in x' und x''. Wird nun eine centrale Collineation bestimmt durch c und B als Centrum und Axe, und wird x' dem Punkte x zugewiesen, so erhält man einen Kegelschnitt K_1, welcher K_0 entspricht und durch x geht, also einer der verlangten ist. Wird aber x'' dem Punkte x zugewiesen, so entspricht in dieser neuen Collineation dem Kegelschnitte K_0 ein zweiter K_2, der durch x geht. Da analog sich zwei Kegelschnitte K_3, K_4 ergeben, die durch x

gehen, und deren Pole von B auf D_2 liegen, so gibt es vier Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen. In der Figur wurde nur der Kegelschnitt K_1 construirt, welcher der Gegenlinie U' der Collineation zugehört. Die Construktion selbst ist aus der Figur ersichtlich.

Anmerkung. Wenn $\overline{cx}$ den K_0 nicht schneidet, so existiren die Kegelschnitte K_1, K_2 nicht. Dies kann nur geschehen, wenn $\{c\}$ hyperbolisch ist und cx nicht in dem Winkelraume von S, T liegt, in dem sich K_0 befindet. Dann existiren aber K_3, K_4, wenn $\{B\}$ elliptisch ist. Würde $\{B\}$ auch hyperbolisch sein, so müssen u, v in demselben Winkelraume von S, T liegen, wie x, damit die Kegelschnitte möglich sind. In diesem Falle ist die Construktion der Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, K_4 wesentlich einfacher.

Man bestimme auf jeder Seite des Dreieckes xuv das Punktepaar, welches die Ecken und die Schnittpunkte von S, T mit dieser Seite harmonisch trennt. Diese drei Punktepaare liegen noch auf vier Geraden, welche Berührungssehnen für S, T sind, für die vier Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, K_4.

Aufgabe 2. Es sind die Kegelschnitte des Systems zu construiren, welche eine Gerade X der Ebene berühren. Die Aufgabe wird wie die Aufgabe 1 gelöst, nur wird X eine der Tangenten von K_0 zugeordnet, welche sich mit X auf B schneidet. Speciell wenn S, T, X alle reell sind, ebenso u und v, erhält man die Aufgabe: Die Kegelschnitte zu construiren, welche durch zwei Punkte gehen und drei Gerade berühren.

Aufgabe 3. Die Kegelschnitte sind zu construiren, welche durch drei Punkte a, b, c gehen und einen Kegelschnitt K doppelt berühren. Man bestimme auf den Seiten des Dreieckes $a\,b\,c$ die zu K conjugirten Pole, welche die zwei Ecken harmonisch trennen. Diese drei Paar Punkte liegen noch auf vier Geraden, welche Berührungssehnen von K und den zu construirenden Kegelschnitten sind. Es sind mithin vier Kegelschnitte der verlangten Art möglich.

Aufgabe 4. Die Kegelschnitte sind zu construiren, welche drei Geraden A, B, C und einen Kegelschnitt doppelt

berühren. Duale Aufgabe zu 3, daher ihre Lösung durch erstere gegeben.

Der Beweis für die Richtigkeit der Lösung ist leicht zu erbringen.

§ 4. Die Brennpunkte der Kegelschnitte.

Hilfssatz. *Ist $a\,b\,c$ ein Poldreieck eines Kegelschnittes K und schneiden die conjugirten Polaren $P, \mathfrak{P}$; $Q, \mathfrak{Q}$; $R, \mathfrak{R}$; ... eine Seite desselben z. B. $C = \overline{a\,b}$ in Punktepaaren einer Involution $\{C\}$, deren ein Paar $a\,b$ ist, so schneiden sie auch die zwei anderen Seiten $A = \overline{b\,c}$ und $B = \overline{a\,c}$ in Punktepaaren einer Involution $\{A\}$ resp. $\{B\}$, in welcher die zwei Dreiecksecken je ein Paar bilden. Ist eine der Involutionen elliptisch, so ist es noch eine zweite, die dritte ist hyperbolisch.*

Zusatz. Schneiden die conjugirten Polaren $P, \mathfrak{P}$; $Q, \mathfrak{Q}$; $R, \mathfrak{R}$; ... eine Tangente C des Kegelschnittes in Punktepaaren einer Involution, in welcher dem Berührungspunkte c der Punkt $\mathfrak{c}$ entspricht, so schneiden sie auch die Polare A von $\mathfrak{c}$ in Punktepaaren einer Involution, in welcher c ein Deckpunkt ist.

Diese Sätze sind die dualen Sätze des Lehrsatzes 4 in § 3, Kap. V, Seite 117 und seines Zusatzes.

Fig. 70. Sei c der Mittelpunkt eines Kegelschnittes K, der kein Kreis ist, A und B seien seine Axen, und a_∞ der Pol von A, daher der unendlich ferne Punkt von B, ebenso b_∞ der unendlich ferne Punkt von A. Es ist dann $c\,a_\infty\,b_\infty$ ein Poldreieck von K, $\overline{a_\infty\,b_\infty} = C_\infty$ ist die unendlich ferne Gerade der Ebene.

Ist x ein beliebiger Punkt der Ebene, so existirt in seiner Involution conjugirter Polaren von K ein Rechtwinkelpaar. Alle diese Rechtwinkelpaare conjugirter Polaren schneiden auf C_∞ die circulare Involution aus, in der $a_\infty\,b_\infty$ ein Paar ist, also schneiden sie auch auf A und B je eine Involution $\{A\}$ und $\{B\}$ aus, von denen eine $\{B\}$ elliptisch, die andere $\{A\}$ hyperbolisch ist. c ist der Mittelpunkt beider Involutionen, da er zu a_∞ resp. b_∞ conjugirt ist.

Es möge das Rechtwinkelpaar in x die Axe A schneiden

in a, $\mathfrak{a}$ und die B in b, $\mathfrak{b}$. Beschreibt man dann über $a \,.\, \mathfrak{a}$ als Durchmesser den Kreis $\mathfrak{K}$, der auch durch x geht, so sind für diesen c und a_∞, sowie b, $\mathfrak{b}$ conjugirte Pole (Kap. III, § 6, Folgerung 3 zu Lehrsatz 2), also hat $\mathfrak{K}$ auf B die Involution $\{B\}$ zur Involution conjugirter Pole. Da dieses für alle $\mathfrak{K}$ gilt, die ihren Mittelpunkt auf A haben und ein Paar der Involution $\{A\}$ ausschneiden, so bilden alle $\mathfrak{K}$ einen Kreisbüschel, dessen Basispunkte alle vier imaginär sind.

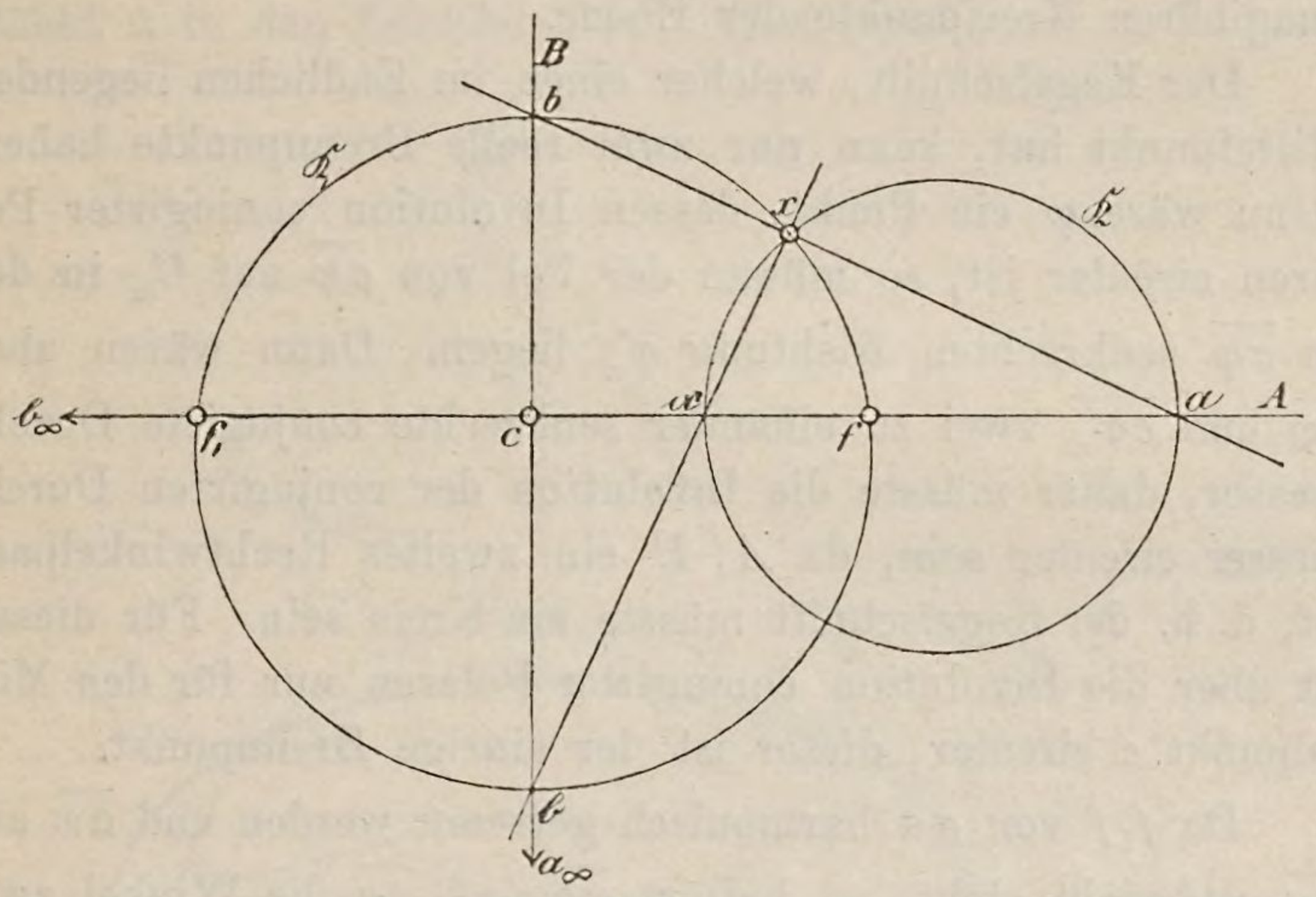


Fig. 70.

Der Kreis $\mathfrak{K}_1$ über $b \,.\, \mathfrak{b}$ als Durchmesser beschrieben, hat ganz analog die Involution $\{A\}$ zur Involution conjugirter Pole, geht mithin durch die Deckpunkte f, f_1 derselben. Die Kreise $\mathfrak{K}_1$ bilden den zu den Kreisen $\mathfrak{K}$ conjugirten Büschel, je zwei Kreise beider Büschel schneiden einander rechtwinklig. (Zusatz 2 auf Seite 137.)

Lässt man den Punkt x den Kreis $\mathfrak{K}$ durchlaufen, so schneiden $\overline{ax}$ und $\overline{\mathfrak{a}x}$ auf B die Involution $\{B\}$ aus, und durchläuft x den Kreis $\mathfrak{K}_1$, so treffen $\overline{bx}$ und $\overline{\mathfrak{b}x}$ die A in Punktepaaren der Involution $\{A\}$. Hiebei sind $\overline{xb}$ und $\overline{x\mathfrak{b}}$ stets conjungirte Polaren für K.

Die Involution $\{B\}$ wird aus f und f_1 durch je eine circulare Strahleninvolution projicirt, die die Involution conjugirter Polaren dieser Punkte für K ist. Man nennt f und

f_1 Punkte, denen eine *circulare* Polareninvolution für K zugehört, *Brennpunkte* des Kegelschnittes K. Da die Involutionen conjugirter Polaren in f und f_1 circular sind, so schneidet A den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten s, s_1, welche *Scheitel* des Kegelschnittes heissen. (Folgerung 1, Seite 63.)

Man nennt wol auch die conjugirt imaginären Deckpunkte der elliptischen Involutionen $\{B\}$ und $\{C_\infty\}$ imaginäre Brennpunkte des Kegelschnittes. Die auf C_∞ liegenden sind die imaginären Kreispunkte der Ebene.

Der Kegelschnitt, welcher einen im Endlichen liegenden Mittelpunkt hat, kann nur zwei reelle Brennpunkte haben. Denn wäre φ ein Punkt, dessen Involution conjugirter Polaren circular ist, so müsste der Pol von $\overline{c\varphi}$ auf C_∞ in der zu $\overline{c\varphi}$ senkrechten Richtung φ'_∞ liegen. Dann wären aber $\overline{c\varphi}$ und $\overline{c\varphi'_\infty}$ zwei zu einander senkrechte conjugirte Durchmesser, daher müsste die Involution der conjugirten Durchmesser circular sein, da A, B ein zweites Rechtwinkelpaar ist, d. h. der Kegelschnitt müsste ein Kreis sein. Für diesen ist aber die Involution conjugirter Polaren nur für den Mittelpunkt c circular, dieser ist der einzige Brennpunkt.

Da $f_1 f$ von $a\,\mathfrak{a}$ harmonisch getrennt werden und $\overline{\mathfrak{a}\,x}$ auf $\overline{a\,x}$ senkrecht steht, so halbirt $\overline{x\,\mathfrak{a}}$ und $\overline{x\,a}$ die Winkel zwischen $\overline{f_1\,x}$ und $\overline{f\,x}$. Ist x ein Punkt des Kegelschnittes K, so ist zu seiner Tangente T jede durch x gehende Gerade conjugirte Polare, also schneidet die Normale $\mathfrak{T}$ auf A einen Punkt t aus, der zum Schnittpunkt t von T in der Involution $\{A\}$ conjugirt ist.

Fig. 71, 72.

Daher halbirt die Tangente T von K im Punkte x den Winkel zwischen den Geraden $\overline{f\,x}$ und $\overline{f_1\,x}$.

Fig 71.

1) Es schneide T die A in dem Punkte t ausserhalb $c\,.\,f$ gelegen, so dass t innerhalb $c\,.\,f$ liegt. Da f, f_1 auch innerhalb K liegen, so liegt auch c innerhalb K, nachdem t ausserhalb K liegen muss. Der Kegelschnitt ist mithin eine Ellipse. Fällt man von f und f_1 auf T die Senkrechten $\overline{f\,n}$ und $\overline{f\,m}$ und macht $n\,.\,g = n\,.\,f$ und $m\,.\,g_1 = m\,.\,f_1$, so geht $\overline{f_1\,x}$ durch g und $\overline{f\,x}$ durch g_1, und es ist $f_1\,.\,g = f\,.\,g_1$. Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$\frac{f_1 g}{f_1 f} = \frac{f_1 x}{f_1 t}$$

und

$$\frac{f g_1}{f f_1} = \frac{f x}{f t},$$

also

$$f_1 x + f x = \frac{f_1 g}{f_1 f}(f_1 t + f t) = f_1 g = \text{Const.},$$

welches die Brennpunktseigenschaft der Ellipse darstellt. Rückt x in den Scheitel s auf A, so wird

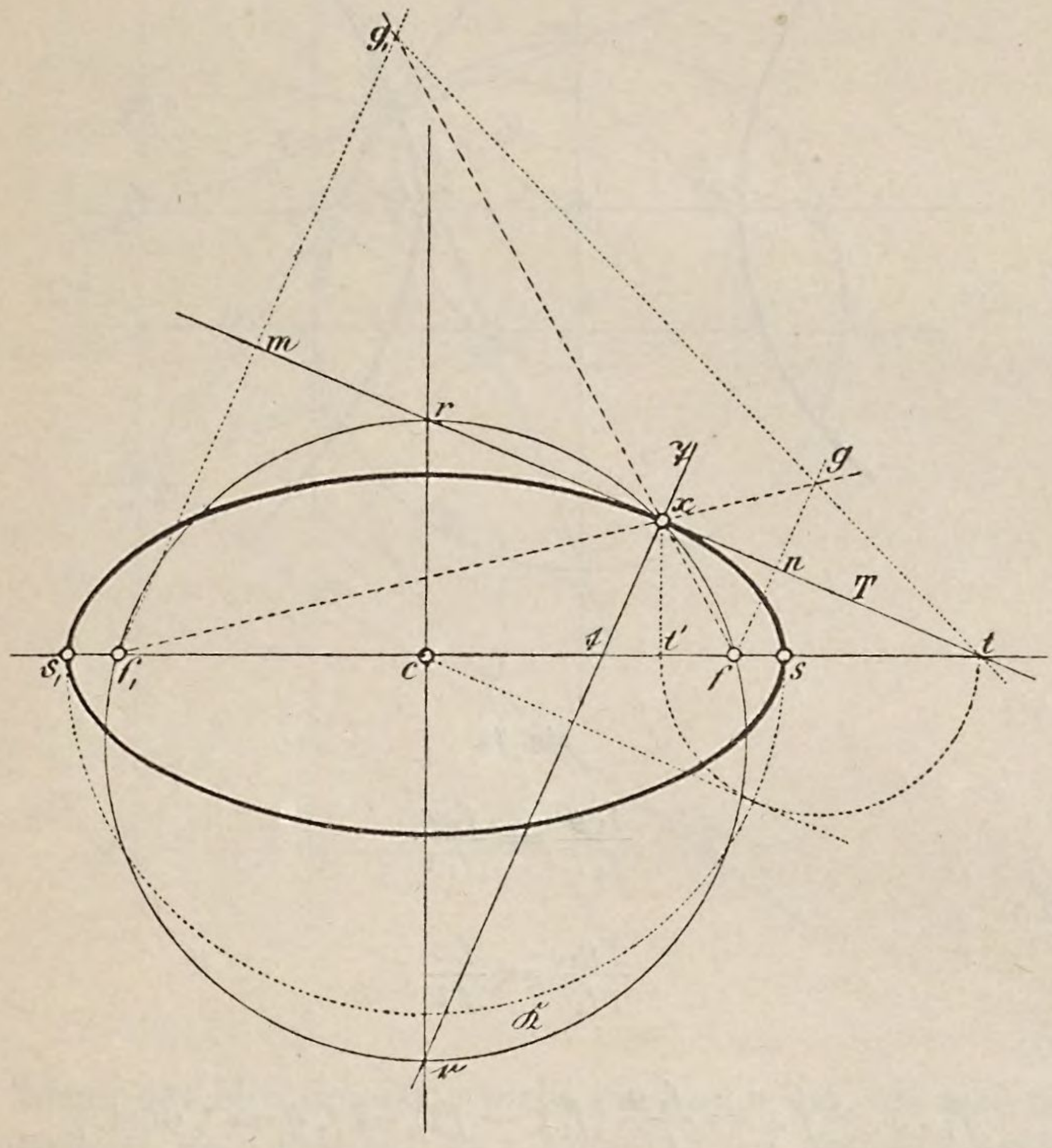


Fig. 71.

$$\text{Const.} = f_1 s + f s = f_1 f + f s + f_1 s_1 = s s_1,$$

da $f s = f_1 s_1$ sein muss, wenn s_1 der andere Scheitel ist.

Daher gilt für die Punkte x der Ellipse:

$$f_1 x + f x = s s_1.$$

Fig. 72. 2) Liegt der Punkt t innerhalb $c\,.\,f$, so muss auch der Mittelpunkt c ausserhalb des Kegelschnittes liegen, dieser ist also eine Hyperbel. Die Scheitel s, s_1 liegen innerhalb $f\,.\,f_1$ in s und s_1. Fällt man wieder von f und f_1 auf T die Senkrechten $\overline{fn}$ und $\overline{f_1 m}$, welche $\overline{f_1 x}$ resp. $\overline{fx}$ in g und g_1 schneiden, so ist $x\,.\,g = x\,.\,f$ und $x\,.\,g_1 = x\,.\,f_1$, also ist $f_1\,.\,g = f\,.\,g_1$, und aus ähnlichen Dreiecken folgt:

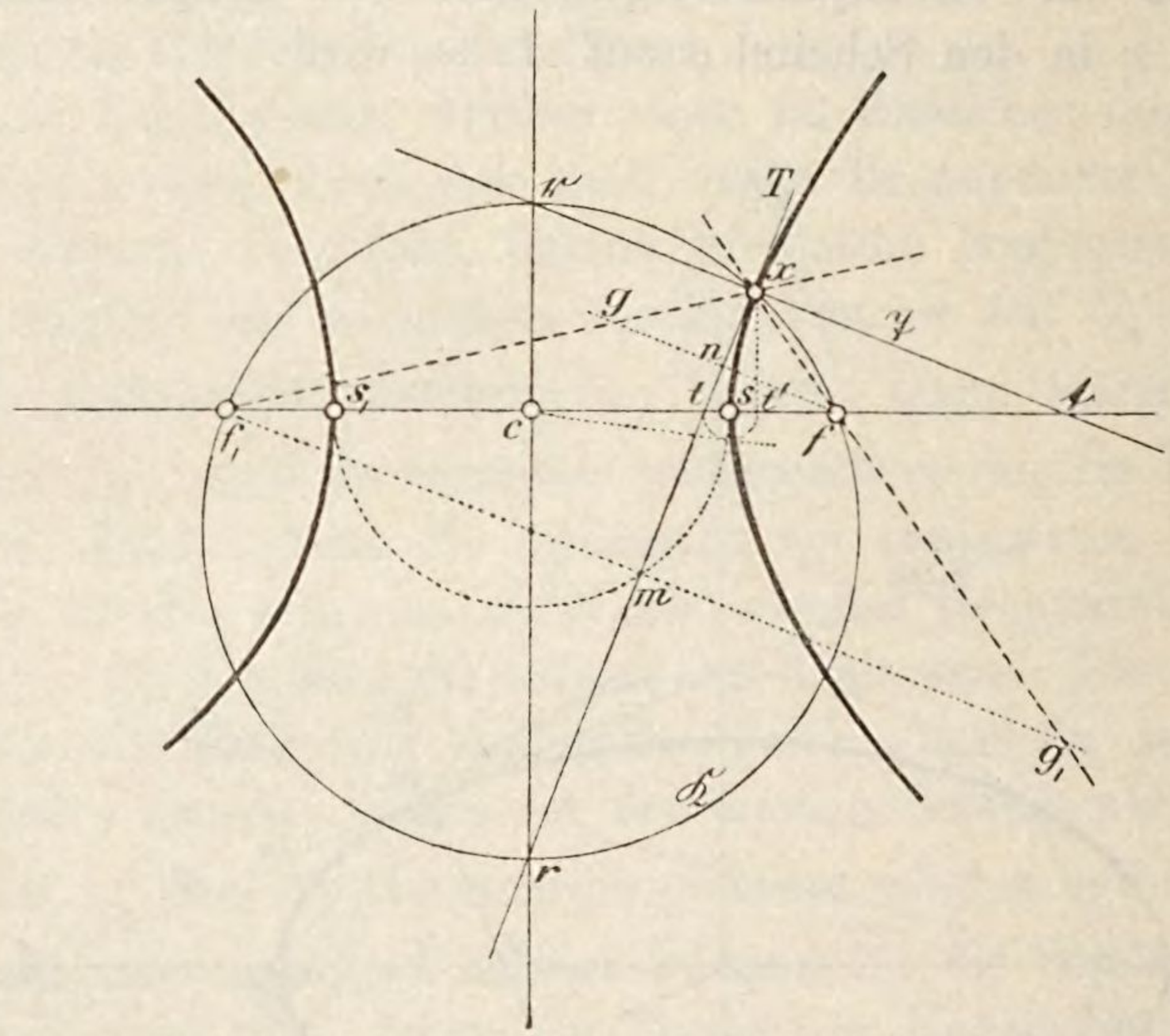


Fig. 72.

$$\frac{f_1 g}{f_1 f} = \frac{f_1 x}{f_1 \mathrm{t}}$$

und

$$\frac{f g_1}{f f_1} = \frac{f x}{f \mathrm{t}},$$

also:

$$f_1\,.\,x - f x = \frac{f_1 g}{f f_1}(f_1 \mathrm{t} - f \mathrm{t}) = f_1 g = \text{Const.},$$

welches die Brennpunktseigenschaft der Hyperbel ist. Rückt x in s, so wird

$$\text{Const.} = f_1 s - f s = f_1 s_1 + s_1 s - f s = s s_1,$$

also gilt für die Punkte x der Hyperbel

$$f_1 x - f x = s s_1\,.$$

Es möge bemerkt werden, dass die durch x zu B gezogene Parallele die Polare von t für K ist, also A in dem conjugirten Pole t' zu t schneidet, und dass s, s_1 die Deckpunkte der Involution sind, die c zum Mittelpunkte und t, t' zu einem Paare hat, so dass $\overline{cs}^2 = ct \,.\, ct'$ ist, wodurch die Scheitel s, s_1 in Fig. 71 und 72 construirt wurden.

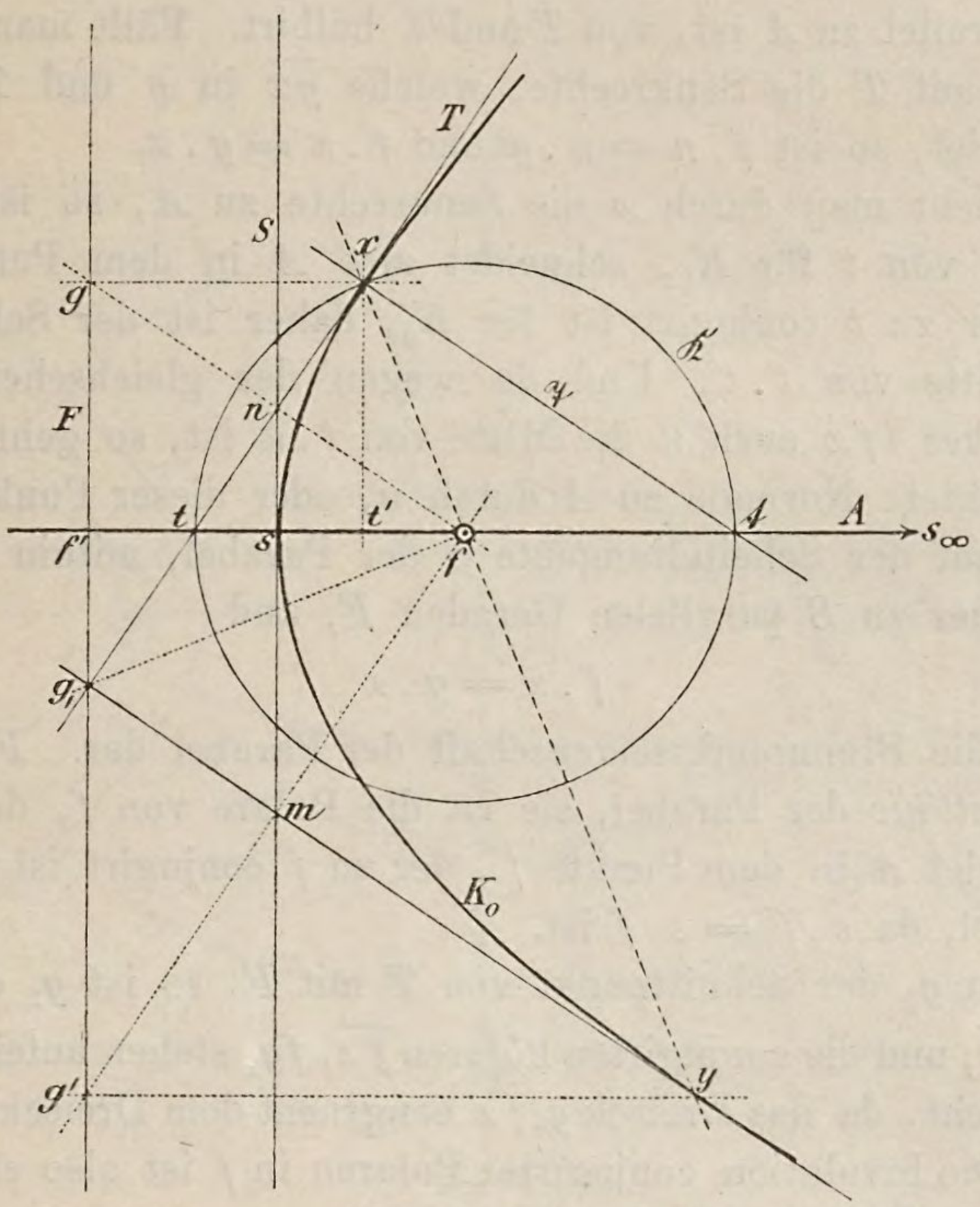


Fig. 73.

Liegt der Mittelpunkt c nicht im Endlichen, ist also der Fig. 73. Kegelschnitt eine Parabel K_0, deren Axe A sei, welche K_0 in dem Scheitel s schneidet, während der unendlich ferne Punkt s_∞ von A der Berührungspunkt von K_0 auf C_∞ ist. Nach dem Zusatze am Anfange dieses Paragraphen schneiden die zu einander orthogonalen conjugirten Polaren für K_0 die A in Punktepaaren einer Involution $\{A\}$, die in s_∞ einen Deckpunkt hat, mithin noch einen zweiten f besitzt, der in

der Mitte zwischen je zwei conjugirten Punkten a, $\mathfrak{a}$ der Involution $\{A\}$ liegt.

Ist x ein Punkt von K_0, T seine Tangente, $\mathfrak{T}$ die Normale, so liegen die Schnittpunkte t und $\mathfrak{t}$ derselben mit A von f gleichweit entfernt, und der Kreis $\mathfrak{K}$, welcher durch t, $\mathfrak{t}$, x geht, hat f zum Mittelpunkt.

Es werden die Winkel zwischen $\overline{fx}$ und der Geraden $\overline{gx}$, die parallel zu A ist, von T und $\mathfrak{T}$ halbirt. Fällt man daher von f auf T die Senkrechte, welche $\overline{gx}$ in g und T in n schneidet, so ist $f\,.\,n = n\,.\,g$ und $f\,.\,x = g\,.\,x$.

Zieht man durch x die Senkrechte zu A, so ist diese Polare von t für K_0, schneidet also A in dem Punkte t', welcher zu t conjugirt ist für K_0, daher ist der Scheitel s die Mitte von $t\,.\,t'$. Und da wegen des gleichschenkligen Dreieckes tfx auch n die Mitte von $t\,.\,x$ ist, so geht die in s errichtete Normale zu A durch n, oder dieser Punkt liegt stets auf der Scheiteltangente S der Parabel, mithin liegt g auf einer zu S parallelen Geraden F, und

$$f\,.\,x = g\,.\,x$$

stellt die Brennpunktseigenschaft der Parabel dar. F heisst die *Leitlinie* der Parabel, sie ist die Polare von f, denn sie schneidet A in dem Punkte f', der zu f conjugirt ist für die Parabel, da $s\,.\,f' = s\,.\,f$ ist.

Ist g_1 der Schnittpunkt von T mit F, so ist g_1 der Pol von $\overline{fx}$, und die conjugirten Polaren $\overline{fx}$, fg_1 stehen aufeinander senkrecht, da das Dreieck $g_1 f x$ congruent dem Dreiecke $g_1 g x$ ist. Die Involution conjugirter Polaren in f ist also circular; f ist der Brennpunkt der Parabel K_0.

Errichtet man in g_1 die Senkrechte auf T, welche $\overline{fx}$ in y schneidet, so ist auch y ein Punkt der Parabel und $\overline{g_1 y}$ ist seine Tangente. Denn ist m der Schnittpunkt von $g_1 y$ mit S, so ist $g_1\,.\,m$ gleich und parallel zu $f\,.\,n$, also ist auch $f\,.\,m$ gleich und parallel zu $g_1\,.\,n$, d. h. es ist $f\,.\,m$ senkrecht zu $\overline{my}$ und gleich $m\,.\,g'$, wenn g' der Schnittpunkt von $\overline{fm}$ mit F ist; und daher ist $f\,.\,y = g'\,.\,y$.

In den Punkten g_1 von F stehen also die zwei an die Parabel gehenden Tangenten zu einander senkrecht.

Zusatz. Die Kegelschnitte, welche in zwei Punkten f, f_1 circulare Polareninvolutionen haben, bilden eine Kegelschnittschaar. Die Punkte f, f_1 sind Brennpunkte aller Kegelschnitte und daher heisst diese Schaar auch die Schaar *confocaler* Kegelschnitte. (Focus: Brennpunkt.)

Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kegelschnitte, Fig. 74.
von denen einer eine Hyperbel und einer eine Ellipse ist (Fol-

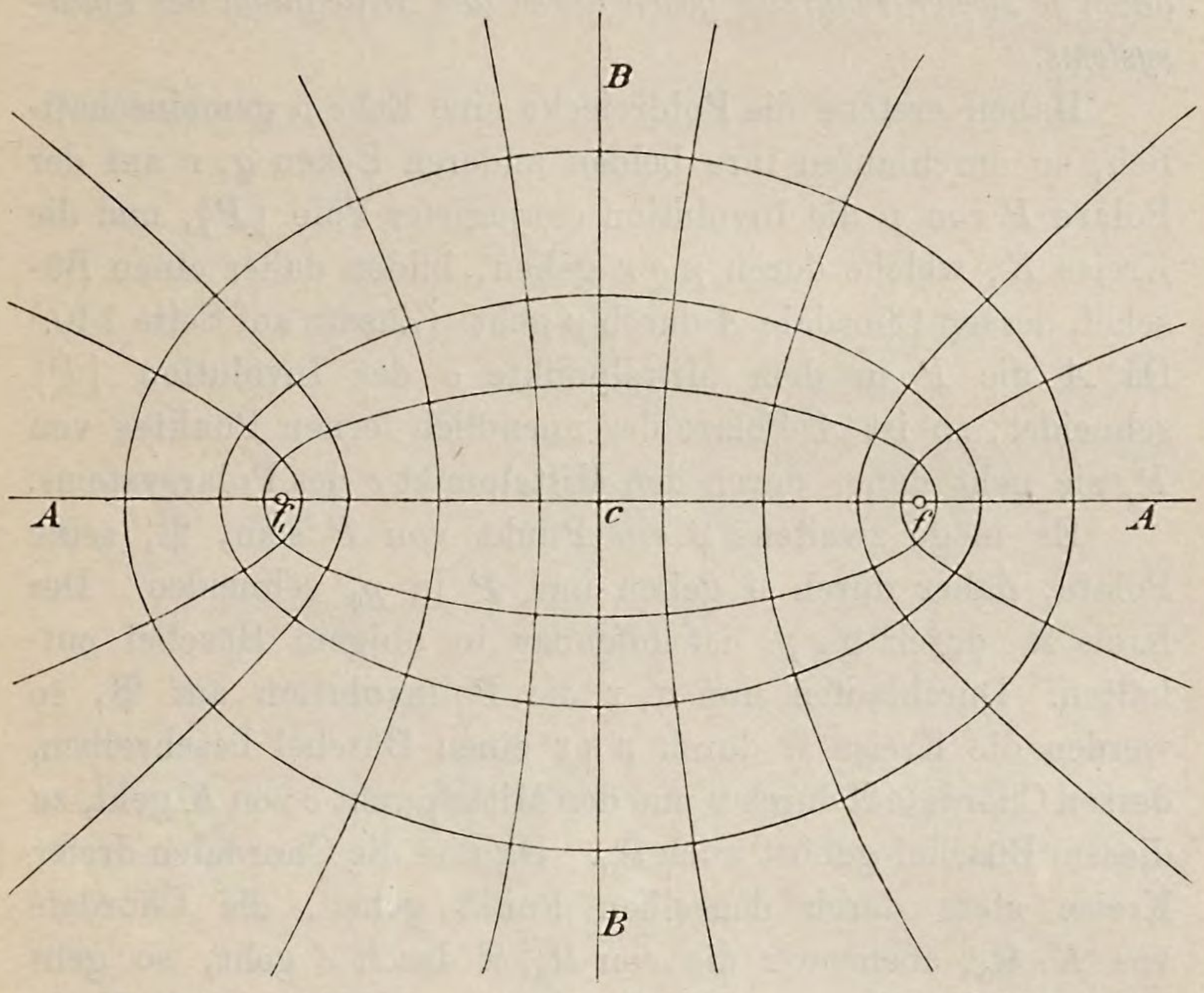


Fig. 74.

gerung 2, Seite 141). Die Tangenten beider in dem Punkte stehen auf einander senkrecht, indem sie die Winkel halbiren, welche die Strahlen, die f, f_1 projiciren, mit einander bilden.

Alle Kegelschnitte haben $\overline{ff_1} = A$ zu einer Axe und die in der Mitte c von $f . f_1$ errichtete Senkrechte B zur anderen Axe. $A\,B\,C_\infty$ ist das allen conjugirte Poldreieck. Die Kegelschnitte haben auch auf B und C_∞ dieselben conjugirt imaginären Brennpunkte.

§ 5. Die Faure'schen Polkreise.

Ein Kreis, welcher durch ein Tripel conjugirter Pole eines Polarsystems geht, heisst *Polkreis*. Nach Kap. IV, § 4, Zusatz, Seite 96 enthält ein Polkreis unendlich viele Poldreiecke des Polarsystems. Es gilt nun folgender

Satz: *Alle Polkreise eines Polarsystems haben in Bezug auf den Mittelpunkt desselben die gleiche Potenz, oder die Chordalen je zweier Polkreise gehen durch den Mittelpunkt des Polarsystems.*

Haben erstens die Poldreiecke eine Ecke p gemeinschaftlich, so durchlaufen ihre beiden anderen Ecken q, r auf der Polare P von p die Involution conjugirter Pole $\{P\}$, und die Kreise K, welche durch $p\,q\,r$ gehen, bilden daher einen Büschel, dessen Chordale A durch p geht. (Zusatz auf Seite 140.) Da A die P in dem Mittelpunkte o der Involution $\{P\}$ schneidet, so ist A Polare des unendlich fernen Punktes von P, sie geht daher durch den Mittelpunkt c des Polarsystems.

Es möge zweitens $\mathfrak{p}$ ein Punkt von P sein, $\mathfrak{P}$, seine Polare, daher durch p gehen und P in p_0 schneiden. Der Kreis $\mathfrak{K}_0$ durch $\mathfrak{p}\,p\,p_0$ ist offenbar in obigem Büschel enthalten. Durchlaufen nun $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die Polinvolution auf $\mathfrak{P}$, so werden die Kreise $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ einen Büschel beschreiben, dessen Chordale $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{p}$ und den Mittelpunkt c von K geht, zu diesem Büschel gehört auch $\mathfrak{K}_0$. Da nun die Chordalen dreier Kreise stets durch denselben Punkt gehen, die Chordale von K, $\mathfrak{K}_0$, ebensowie die von $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$ durch c geht, so geht auch die Chordale von K, $\mathfrak{K}$ durch c. Hiebei enthält K ein Tripel, dessen ein Punkt p ist und $\mathfrak{K}$ ein Tripel, dessen ein Punkt $\mathfrak{p}$ auf P, der Polare von p, liegt.

Sind drittens $p\,q\,r$ und $x\,y\,z$ irgend zwei Poldreiecke, K und K' die ihnen umschriebenen Kreise, so sei $\mathfrak{p}$ der Schnittpunkt von $\overline{qr}$ mit $\overline{yz}$, seine Polare $\mathfrak{P}$ ist die Gerade $\overline{xp}$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ seien irgend zwei conjugirte Pole auf $\mathfrak{P}$, so dass der Kreis $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ ein Polkreis ist. Nach dem Vorhergehenden geht dann die Chordale von K und $\mathfrak{K}$, sowie die von K' und $\mathfrak{K}$ durch c, also auch die Chordale von K und K'.

Fig. 75. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so dass c_∞ der unend-

lich ferne Punkt der Axe ist, so sind alle Chordalen der Axe parallel, daher liegen alle Mittelpunkte der Polkreise auf einer Geraden. Sei g ein Punkt derselben, so bilden alle Polkreise, welche durch g gehen, einen Büschel, und zwar berühren sie alle in g die Chordale A, welche parallel zur Axe

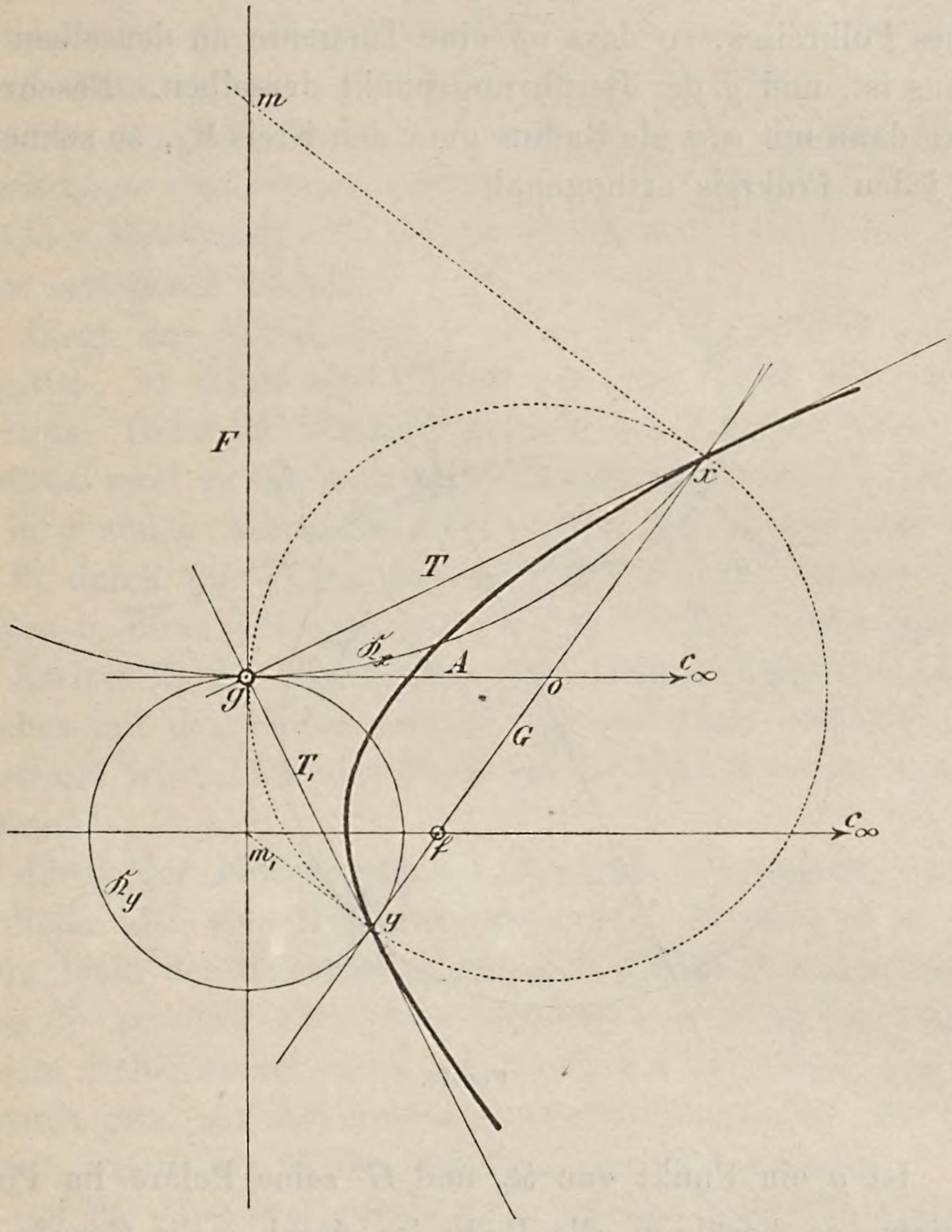


Fig. 75.

der Parabel ist, und schneiden auf G, der Polare von g, die Involution $\{G\}$ conjugirter Pole aus. Der Schnittpunkt o von A mit G ist der Mittelpunkt der Involution $\{G\}$. Wird mit $o\,.\,g$ als Radius ein Kreis beschrieben, so schneidet er G in den Deckpunkten x, y von $\{G\}$. (Zusatz 2; Seite 136.)

Daher stehen die Tangenten $\overline{gx}$ und $\overline{gy}$ der Parabel auf einander senkrecht, und es folgt, dass g ein Punkt der Polaren F des Brennpunktes f ist. Daher haben wir für die Parabel den Satz:

Die Mittelpunkte aller Polkreise einer Parabel liegen auf der Leitlinie derselben.

Fig. 76. Es sei c im Endlichen gelegen und ausserhalb irgend eines Polkreises, so dass $\overline{cg}$ eine Tangente an denselben von c aus ist, und g der Berührungspunkt derselben. Beschreibt man dann mit $c.g$ als Radius um c den Kreis $\mathfrak{K}_0$, so schneidet er jeden Polkreis orthogonal.

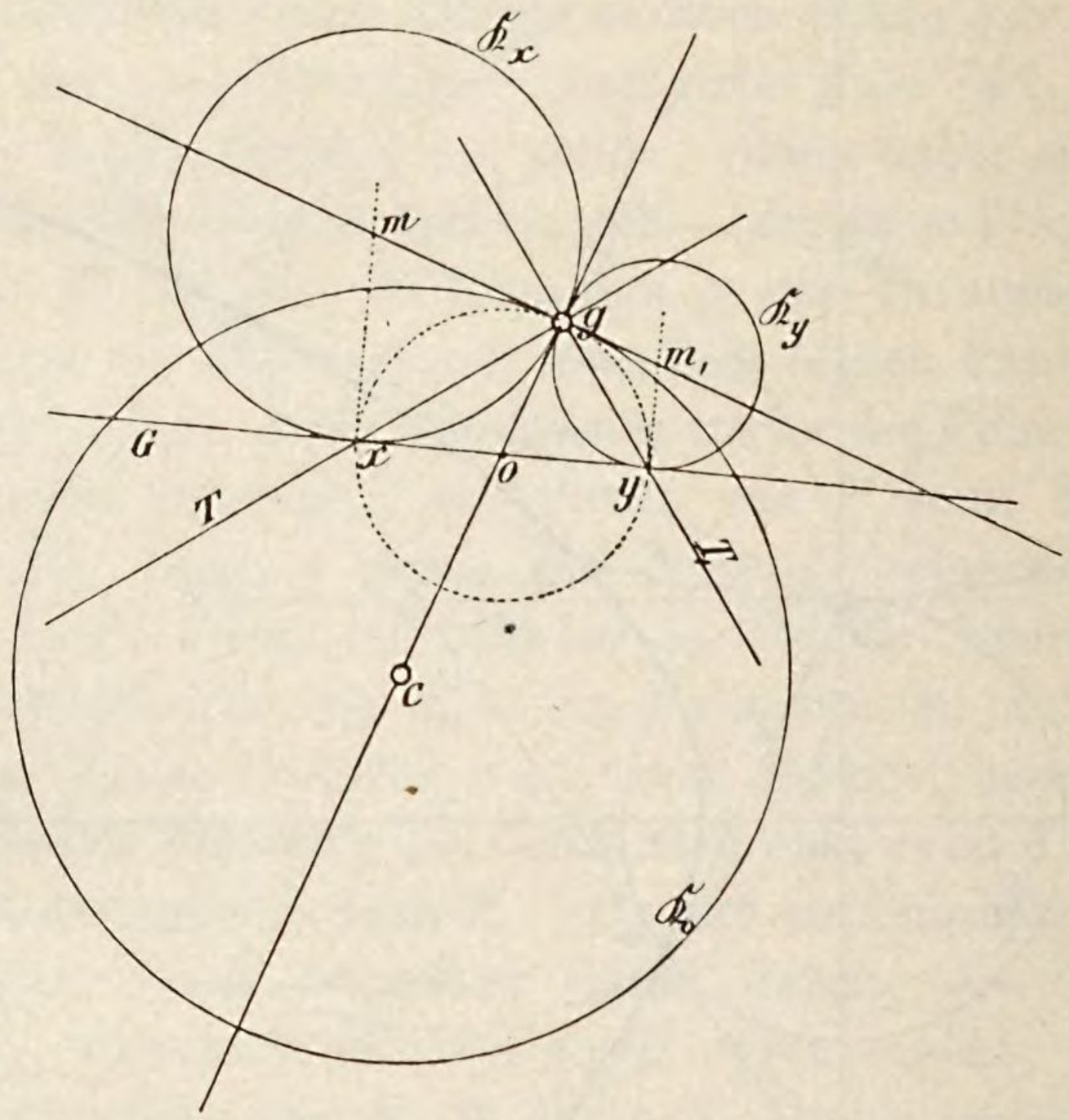


Fig. 76.

Ist g ein Punkt von $\mathfrak{K}_0$ und G seine Polare im Polarsystem, so berühren alle Polkreise durch g die Gerade $\overline{cg}$. Ist o der Schnittpunkt von $\overline{cg}$ mit G, und beschreibt man mit $o.g$ als Halbmesser um o den Kreis, so schneidet er G in den Deckpunkten x, y der Polinvolution $\{G\}$ (Zusatz 2, Seite 136) und mithin stehen die Tangenten $\overline{gx}$ und $\overline{gy}$ des Kegelschnittes auf einander senkrecht.

Umgekehrt, ist g der Scheitel eines rechten Winkels, der

einem Kegelschnitte umschrieben ist, so liegt g auf dem Orthogonalkreise aller Polkreise. Denn sind x und y die Berührungspunkte der Tangenten $T = \overline{gx}$ und $T_1 = \overline{gy}$, und beschreibt man die Kreise $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{K}_y$, welche in x resp. y die Gerade $G = \overline{xy}$ berühren und durch g gehen, so berühren einander $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{K}_y$ auch in g, und ihre Tangente geht durch den Mittelpunkt c des Kegelschnittes, als Polare des unendlich fernen Punktes von G. Es gilt mithin der Satz:

Der Ort der Scheitel der rechten Winkel, welche einem Kegelschnitte umschrieben werden können, ist ein Kreis $\mathfrak{K}_0$, der denselben Mittelpunkt hat, wie der Kegelschnitt, und der alle Polkreise orthogonal schneidet.

Liegt der Mittelpunkt c innerhalb des reellen Kegelschnittes, ist dieser eine Ellipse oder ein Kreis, so existirt $\mathfrak{K}_0$ stets. Denn ist T eine Tangente des Kegelschnittes, so existiren zwei zu ihr senkrechte Tangenten $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$, welche sie in g und g' schneiden und $c\,.\,g$ ist der Radius von $\mathfrak{K}_0$. Da $\mathfrak{K}_0$ durch die Ecken des Rechteckes geht, welches der Ellipse in ihren Scheiteln umschrieben ist, so ist der Radius des Kreises $\mathfrak{K}_0$ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes, welches mit den beiden Längen der Halbaxen als Katheten construirt wird. Für den Kreis ist der Radius von $\mathfrak{K}_0$ analog bestimmt.

Liegt der Mittelpunkt c ausserhalb des Kegelschnittes, ist dieser also eine Hyperbel, so existirt $\mathfrak{K}_0$ nur, wenn die Asymptoten der Hyperbel einen spitzen Winkel einschliessen. Denn die zu einer Asymptote senkrechte Richtung liegt dann in dem Nebenwinkel, alsó ausserhalb der Hyperbel, und es existiren zwei zur Asymptote senkrechte Tangenten der Hyperbel, welche sie in den Punkten von $\mathfrak{K}_0$ schneiden.

Ist die Hyperbel gleichseitig, so sind ihre Asymptoten das einzige Paar rechtwinkliger Tangenten, $\mathfrak{K}_0$ reducirt sich auf den Mittelpunkt c; alle Polkreise gehen durch c.

Ist der Winkel der Asymptoten ein stumpfer, so ist $\mathfrak{K}_0$ nicht reell.

Ist der Kegelschnitt imaginär, so kann $\mathfrak{K}_0$ auch nicht reell sein.

VII. Kapitel.

Projektivität im Kegelschnittbüschel. — Kegelschnittnetz. — Zwei Büschel, die nicht in einem Netze liegen. — Involutionen vierten und dritten Grades.

§ 1. Projektivität im Kegelschnittbüschel.

Definition. *Der Kegelschnittbüschel heisst projektivisch zum Polarenbüschel irgend eines Punktes der Ebene.* Homologe Elemente sind der Kegelschnitt und seine Polare. Zwei Kegelschnittbüschel heissen projektivisch, wenn es ihre Polarenbüschel sind.

Um daher einen Kegelschnittbüschel projektivisch auf ein anderes Gebilde zu beziehen, kann man drei Kegelschnitten des Büschels irgend drei Elemente des Gebildes zuweisen, wodurch dann die Projektivität bestimmt ist.

Irgend zwei Polarenbüschel desselben Kegelschnittbüschels sind einander projektivisch (Kap. VI, § 1, Folgerung 1 zu Lehrsatz 3, Seite 132), also ist der Kegelschnittbüschel auch projektivisch zum Tangentenbüschel der Kegelschnitte in einem Grundpunkte d des Büschels, sobald nicht alle Kegelschnitte einander daselbst berühren.

Lehrsatz 1. *Der Kegelschnittbüschel ist in diesem Falle auch projektivisch zu dem geraden Gebilde, welches die Kegelschnitte auf einer beliebigen, durch den Grundpunkt gehenden Geraden ausschneiden.*

Fig. 77. Denn sind d, δ die Deckpunkte der Involution $\{\Delta\}$ und G eine durch d gehende Gerade, m ein beliebiger Punkt von G, so ist der Kegelschnitt des Büschels durch d, δ, m und die Polinvolution $\{\Delta_1\}$ nach der Aufgabe 3 des § 1, Kap. IV, Seite 70 construirbar in folgender Weise. Sind p, c die

Schnittpunkte von Δ und G mit Δ_1 und $p\,\mathfrak{p}_1$, sowie $c\,\mathfrak{c}$ zwei Paare der Involution $\{\Delta_1\}$, so schneiden sich $\overline{\delta\,\mathfrak{p}_1}$ und $\overline{m\,\mathfrak{c}}$ in dem Punkte d' von K, so zwar, dass der Pol von $\overline{d\,d'}$ der Punkt t von Δ_1 ist, welcher mit dem Schnittpunkte τ

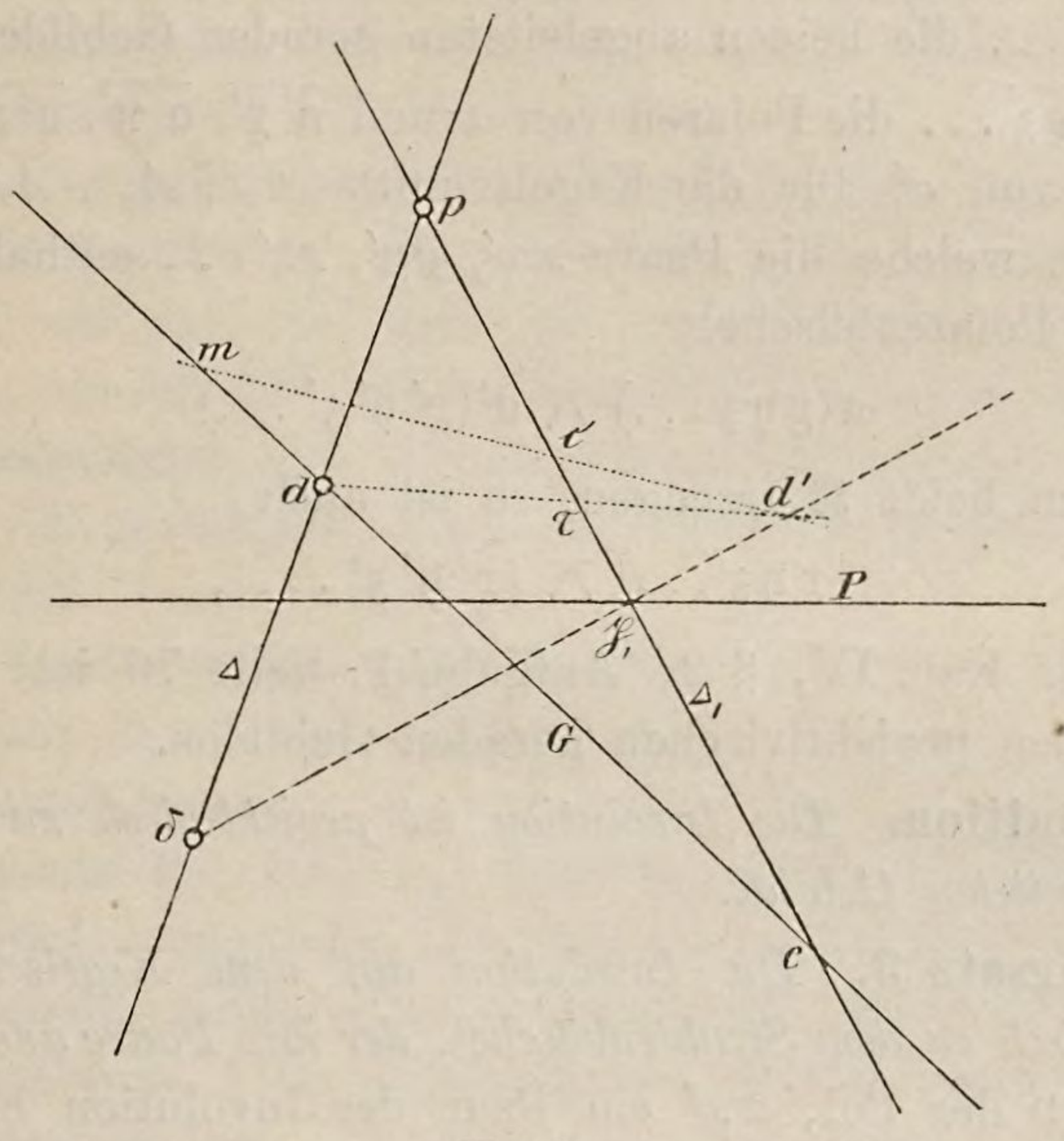


Fig. 77.

von $\overline{d\,d'}$ mit Δ_1 ein Paar von $\{\Delta_1\}$ bildet. Durchläuft nun m das gerade Gebilde $|G|$, so beschreibt d', da $\mathfrak{c}$ fest bleibt, auf $\overline{\delta\,\mathfrak{p}_1}$, also auch τ auf Δ_1 ein zu $|G|$ projektivisches gerades Gebilde, mithin ist auch der Strahlenbüschel $d(t) \barwedge |G|$. Dieser Strahlenbüschel ist aber der Tangentenbüschel der Kegelschnitte.

Definition. Eine Involution sei gegeben, xx', yy', zz', ... sind ihre Paare. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... die Elemente des Gebildes, welche ein festes Element a von den Paaren xx', yy', zz', ... harmonisch trennen, so möge $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... das aus der Involution mittels des Elementes a abgeleitete Gebilde heissen.

Lehrsatz 2. *Irgend zwei aus derselben Involution abgeleitete Gebilde sind projektivisch, und die Involution ist denselben adjungirt.*

Die Involution $\{G\}$ sei auf der Geraden G gegeben,

xx', yy', zz', ... ihre Paare. Ist (A^2) ein Kegelschnittbüschel, welcher dieselbe ausschneidet, so möge in der Steiner'schen Verwandtschaft der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ der Geraden G entsprechen. Sind nun a, a' irgend zwei feste Punkte von G, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ die ihnen für den Büschel conjungirten, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ..., $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ ... die beiden abgeleiteten geraden Gebilde, so sind $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}$, $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{y}}$, $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{z}}$ ... die Polaren von a und $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{x}'}$, $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{y}'}$, $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{z}'}$ ... die Polaren von a' für die Kegelschnitte A_x^2, A_y^2, A_z^2 ... des Büschels, welche die Paare xx', yy', zz' ... enthalten. Da nun der Polarenbüschel

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\ldots) \barwedge \mathfrak{a}'(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}'\ldots)$$

ist, indem beide $\mathfrak{K}$ erzeugen, so ist auch

$$|\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\ldots| \barwedge |\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}'\ldots|,$$

und nach Kap. IV, § 2, Aufgabe 1, Seite 76 ist $\{G\}$ adjungirt den projektivischen geraden Gebilden.

Definition. *Die Involution ist projektivisch zu dem aus ihr abgeleiteten Gebilde.*

Lehrsatz 3. *Die Involution auf dem Kegelschnitte ist projektivisch zu dem Strahlenbüschel, der ihre Paare ausschneidet.*

Fig. 78. Ist $\mathfrak{p}$ der Pol, xx' ein Paar der Involution und t ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes K, so bestimme man in (t) den Strahl, welcher $\overline{tx}$, $\overline{tx'}$ von dem festen Strahle $\overline{t\mathfrak{p}}$ harmonisch trennt. Schneidet derselbe $\overline{xx'}$ in $\mathfrak{p}'$, so ist $\mathfrak{p}'$ ein Punkt von $\mathfrak{P}$, der Polare von $\mathfrak{p}$ für K. Da nun $t(\mathfrak{p}')$ projektivisch ist zu der Involution, so ist es auch der Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(\mathfrak{p}')$.

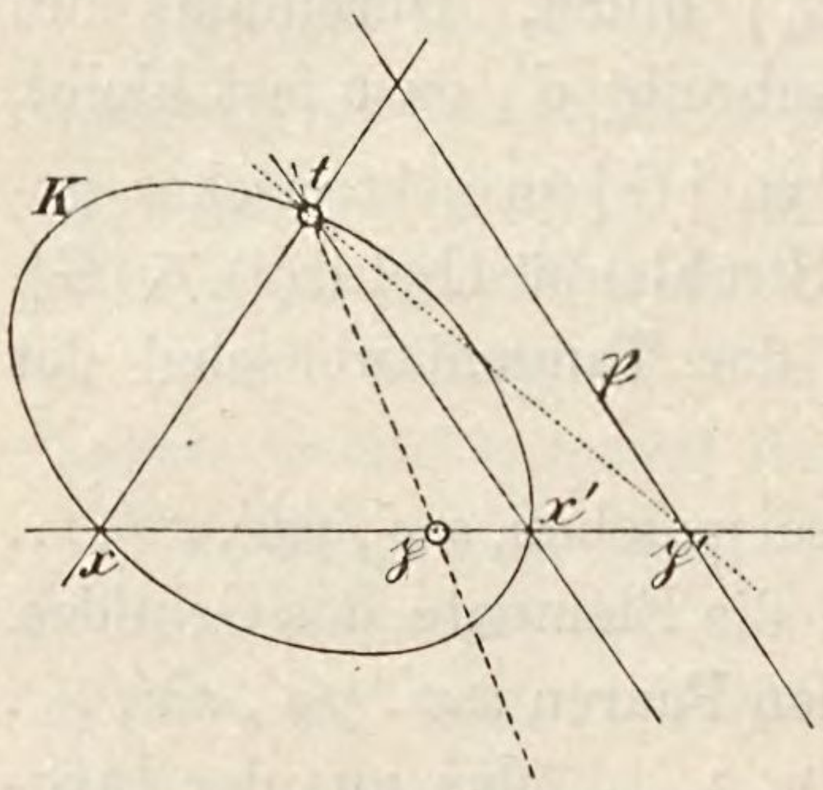


Fig. 78.

Folgerungen. 1. Soll eine Involution projektivisch bezogen werden auf ein anderes Gebilde, so kann man drei Paaren der Involution drei beliebige Elemente des Gebildes zuweisen, wodurch dann die Projektivität vollständig bestimmt ist. Dasselbe gilt, wenn das zweite Gebilde wieder eine Involution

ist, wenn statt des Elementes ein Paar der Involution genommen wird.

2. Haben zwei conlocale projektivische Involutionen drei homologe Paare gemeinschaftlich, so sind sie identisch.

Lehrsatz 4. *Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden auf zwei Geraden G, G' der Ebene zwei zu einander projektivische Involutionen $\{G\}$, $\{G'\}$ aus.*

Ist a der Schnittpunkt von G mit G' und $\mathfrak{a}$ der ihm im Büschel conjugirte, so schneidet der Polarenbüschel $(\mathfrak{a})$ auf G und G' die aus $\{G\}$ und $\{G'\}$ abgeleiteten geraden Gebilde aus, woraus die Behauptung des Lehrsatzes folgt.

Folgerungen. 1. Der Kegelschnittbüschel ist projektivisch zu der Involution, die er auf einer beliebigen Geraden ausschneidet.

2. Zwei projektivische Kegelschnittbüschel schneiden zwei Gerade (oder auch eine) in zwei zu einander projektivischen Involutionen.

Lehrsatz 5. *Zwei auf demselben Träger liegende projektivische Involutionen $\{J\}$, $\{\mathfrak{J}\}$ haben vier Doppelelemente d. h. solche Elemente, welche zwei entsprechenden Paaren der Involutionen angehören. Die Doppelelemente können paarweise conjungirt imaginär sein.*

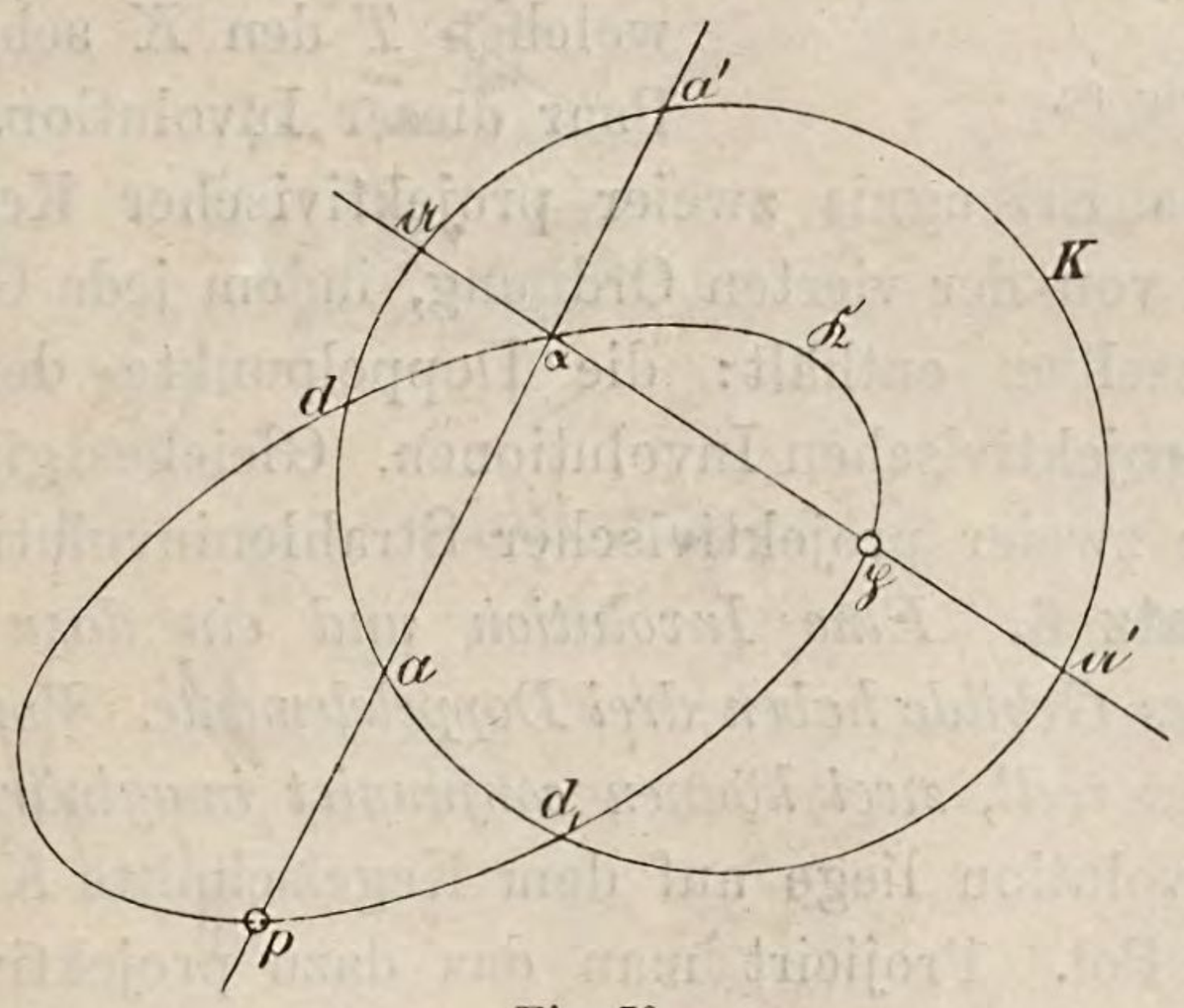


Fig. 79.

Zum Behuf des Beweises nehmen wir die Involutionen Fig. 79. auf dem Kegelschnitte K an, p sei der Pol von $\{J\}$ und $\mathfrak{p}$ von $\{\mathfrak{J}\}$. Die durch die Paare der Involution auf einander

projektivisch bezogenen Strahlenbüschel (p) und $(\mathfrak{p})$ erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Ist d ein Schnittpunkt von $\mathfrak{K}$ und K, so ist derselbe ein Doppelpunkt; woraus die Behauptungen des Lehrsatzes folgen.

Folgerung 1. Ist eine Involution elliptisch, die andere hyperbolisch, so sind wenigstens zwei Doppelpunkte reell. Denn der eine Pol liegt innerhalb, der andere ausserhalb K, also muss $\mathfrak{K}$ den K wenigstens in zwei reellen Punkten schneiden.

2. *Haben* $\{J\}$ *und* $\{\mathfrak{J}\}$ *ein Paar* $(a\,a') = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}')$ *gemeinschaftlich, so sind die beiden anderen Doppelpunkte ein Paar aller der Involutionen, die durch zwei homologe Paare* xx' *und* $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ *bestimmt werden.* Denn die projektivischen Büschel (p) und $(\mathfrak{p})$ liegen perspektivisch und erzeugen mithin eine Gerade T, welche K in den zwei übrigen Doppelpunkten schneidet. Die Strahlen $\overline{pxx'}$ und $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{x}\mathfrak{x}'}$ schneiden einander daher in dem Punkte ξ von T d. h. ξ ist der Pol der Involution, deren Paare xx', $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ sind, also sind auch die Punkte, in welchen T den K schneidet, ein Paar dieser Involution.

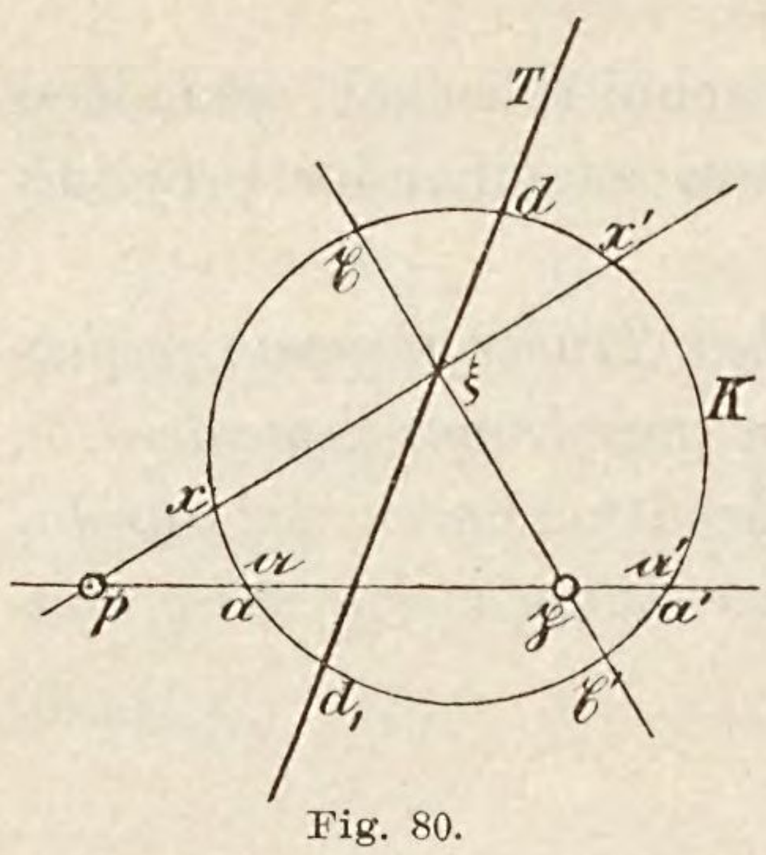


Fig. 80.

Fig. 80.

3. Das Erzeugnis zweier projektivischer Kegelschnittbüschel ist von der vierten Ordnung, indem jede Gerade vier Punkte desselben enthält: die Doppelpunkte der auf ihr liegenden projektivischen Involutionen. Gleiches gilt von dem Erzeugnisse zweier projektivischer Strahleninvolutionen.

Lehrsatz 6. *Eine Involution und ein dazu conlocales projektivisches Gebilde haben drei Doppelelemente. Von denselben ist stets eines reell, zwei können conjungirt imaginär sein.*

Die Involution liege auf dem Kegelschnitte K und habe in p ihren Pol. Projicirt man das dazu projektivische Gebilde aus dem Punkte t von K, so werden die projektivischen Büschel (p) und (t) einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ erzeugen, der durch t geht, also K notwendig noch in einem Punkte d schneidet, der ein Doppelpunkt ist.

Anmerkung. Das aus der Involution $\{J\}$ mittels des Elementes a abgeleitete Gebilde hat mit derselben drei Doppelpunkte gemeinschaftlich, bestehend aus a und den Deckpunkten von $\{J\}$.

Folgerung. Das Erzeugnis eines Strahlenbüschels und eines zu demselben projektivischen Kegelschnittbüschels ist von der dritten Ordnung, indem auf jeder Geraden der Ebene drei Punkte desselben liegen. Von diesen ist einer stets reell. Gleiches gilt von dem Erzeugnis eines Strahlenbüschels und einer dazu projektivischen Strahleninvolution.

Lehrsatz 7. *Durch das Erzeugnis C^4 der Kegelschnittbüschel $(A_1^2 A_2^2 A_3^2 \ldots) \barwedge (\mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{A}_3^2 \ldots)$ werden auch die Büschel $(A_1^2 \mathfrak{A}_1^2)$ und $(A_2^2 \mathfrak{A}_2^2)$ auf einander projektivisch bezogen, so dass also, wenn B_1^2, B_2^2 die Kegelschnitte der Büschel sind, welche durch denselben Punkt von C^4 gehen, die Büschel $(A_1^2 \mathfrak{A}_1^2 B_1^2 \ldots) \barwedge (A_2^2 \mathfrak{A}_2^2 B_2^2 \ldots)$ dasselbe Erzeugnis C^4 hervorbringen.*

Es sei g einer der Schnittpunkte von A_3^2 und $\mathfrak{A}_3^2$, also ein Punkt von C^4, und G eine beliebige durch g gehende Gerade. Auf G schneidet der Büschel (A^2) eine Involution $\{G\}$ und $(\mathfrak{A}^2)$ die dazu projektivische Involution $\{\mathfrak{G}\}$ aus. g ist

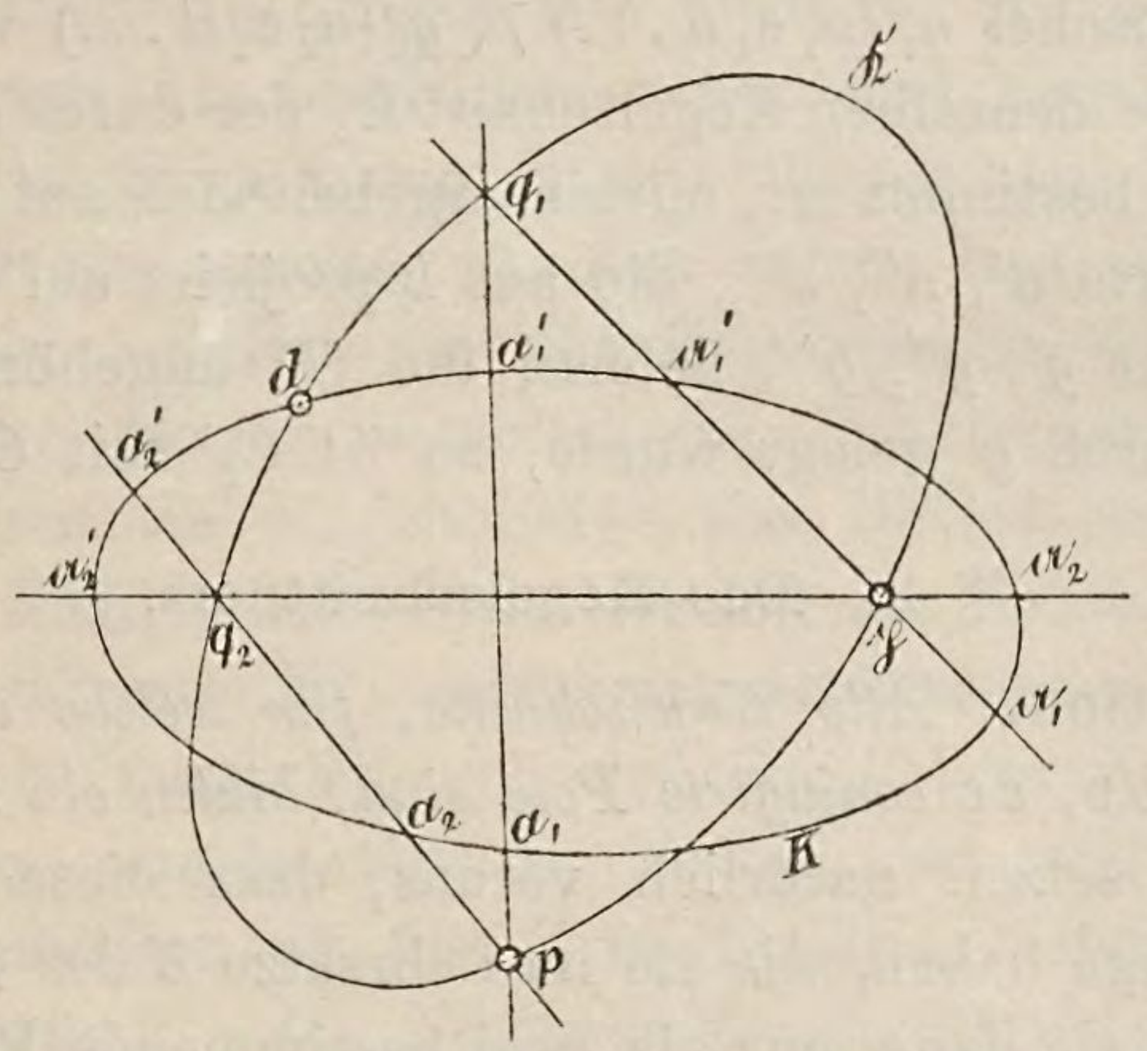


Fig. 81.

ein Doppelpunkt der projektischen Involutionen, g', g'', g''' seien die übrigen.

Projiciren wir $\{G\}$ und $\{\mathfrak{G}\}$ aus einem Punkte k eines Fig. 81.

Kegelschnittes K auf diesen, so seien p und $\mathfrak{p}$ die Pole der auf K projicirten Involutionen, und d sei die Projektion von g. Sind $a_1 a_1'$, $a_2 a_2'$ die Projektionen der Paare von $\{G\}$, in welchen A_1^2, A_2^2 die G schneiden, und entsprechen analog $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2'$ den Schnittpunkten von $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{A}_2^2$ mit G, so ist der Büschel $p(a_1 a_2 d \ldots) \barwedge \mathfrak{p}(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 d \ldots)$ und sie erzeugen daher den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch d, p, $\mathfrak{p}$ geht und auf K die Punkte d', d'', d''' bestimmt, die aus k auf G projicirt die drei übrigen Punkte g', g'', g''' von C^4 liefern.

Ist q_1 der Schnittpunkt von $\overline{pa_1}$ und $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1}$ und q_2 der von $\overline{pa_2}$ und $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_2}$, q_1, q_2 also auf $\mathfrak{K}$ gelegen, so ist q_1 der Pol der Involution, die aus k auf G projicirt vom Kegelschnittbüschel $(A_1^2 \mathfrak{A}_1^2)$ ausgeschnitten wird, und analog entspricht der Pol q_2 der Involution, welche der Büschel $(A_2^2 \mathfrak{A}_2^2)$ auf G ausschneidet.

Ist nun B_1^2 der Kegelschnitt des Büschels $(A_1^2 \mathfrak{A}_1^2)$, der durch g geht und B_2^2 ein solcher von $(A_2^2 \mathfrak{A}_2^2)$, und bezieht man den Büschel $(A_1^2 \mathfrak{A}_1^2 B_1^2 \ldots) \barwedge (A_2^2 \mathfrak{A}_2^2 B_2^2 \ldots)$, so wird von ihrem Erzeugnisse C_1^4 g ein Punkt sein. Die drei übrigen bestimmen wir dadurch, dass wir *die* Involutionen aus k auf K projiciren, welche *diese* Büschel auf G ausschneiden. Da nun der Büschel $q_1(a_1 \mathfrak{a}_1 d \ldots) \barwedge q_2(a_2 \mathfrak{a}_2 d \ldots)$ wird, so erzeugen diese denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch $d, p, \mathfrak{p}, q_1, q_2$ vollständig bestimmt ist, mithin ergeben sich auf K dieselben Doppelpunkte d', d'', d''', die aus k projicirt auf G dieselben drei Punkte g', g'', g''' liefern, die C^4 angehörten. Da G beliebig durch g gelegt wurde, so ist C_1^4 mit C^4 identisch.

§ 2. Das Kegelschnittnetz.

Definition. *Alle Kegelschnitte, für welche drei Punktepaare $a\,\mathfrak{a}$, $b\,\mathfrak{b}$, $c\,\mathfrak{c}$ conjugirte Pole sind, bilden ein Kegelschnittnetz.* Wir setzen natürlich voraus, dass diese drei Paare *nicht* die Lage haben, wie sie im Lehrsatze 3 des § 7, Kap. III auftritt, da sie dann nur als zwei bestimmende Paare für die Kegelschnitte gelten würden. Fällt ein Punktepaar in einen Punkt zusammen, so müssen alle Kegelschnitte des Netzes durch diesen Punkt gehen. Die Kegelschnitte, welche durch drei Punkte gehen, bilden daher ein specielles Netz.

Ein Kegelschnitt des Netzes ist durch irgend zwei Punkte der Ebene bestimmt (Aufgabe 4 des § 1, Kap. VI, Seite 139). Durch einen Punkt x der Ebene geht ein Büschel von Kegelschnitten des Netzes. Zwei Büschel, welche durch die Punkte x, y bestimmt werden, haben stets den Kegelschnitt des Netzes gemeinschaftlich, welcher durch x, y bestimmt ist.

Lehrsatz 1. *Sind A^2, B^2, C^2 drei Kegelschnitte der Ebene, die nicht einem Büschel angehören, und ist L^2 ein Kegelschnitt des Büschels $(A^2 C^2)$ und M^2 ein solcher von $(B^2 C^2)$, so liegen alle Kegelschnitte des Büschels $(L^2 M^2)$ in einem Netze, wobei sowol L^2 als M^2 die Büschel $(A^2 C^2)$ resp. $(B^2 C^2)$ durchlaufen sollen. Ist K^2 ein Kegelschnitt des Büschels $(L^2 M^2)$ und K_1^2 ein solcher eines anderen Büschels $(L_1^2 M_1^2)$, so liegen auch die Kegelschnitte des Büschels $(K^2 K_1^2)$ in demselben Netze, u. s. w.*

Sei a eine Ecke des A^2, C^2 gemeinschaftlichen Poldreieckes und A die Polare von a für A^2 und C^2. Ist dann $\mathfrak{a}$ der Schnittpunkt der Polare A' von a für B^2, so sind a, $\mathfrak{a}$ conjugirte Pole für A^2, B^2, C^2. Analog erhält man durch die Büschel $(B^2 C^2)$ und $(A^2 B^2)$ zwei weitere Paare $b\,\mathfrak{b}$, $c\,\mathfrak{c}$ von Punkten, welche auch für A^2, B^2, C^2 conjugirt sind. Daher sind aber auch $a\,\mathfrak{a}$, $b\,\mathfrak{b}$, $c\,\mathfrak{c}$ für L^2 und M^2, also für jeden Kegelschnitt des Büschels $(L^2 M^2)$ conjugirt, also auch für K^2 u. s. w.

Auf diese Art bestimmen irgend drei Kegelschnitte des Netzes, die nicht in einem Büschel liegen, das Netz. Jedes Punktepaar $a\,\mathfrak{a}$, welches für drei solche Kegelschnitte conjugirt ist, ist conjugirt für alle Kegelschnitte des Netzes.

Zusatz. Es gibt unendlich viele Punktepaare $x\,\mathfrak{x}$, welche in Bezug auf die Kegelschnitte des Netzes conjugirt sind. Denn ist $(K^2 K_1^2)$ irgend ein Büschel des Netzes und x eine Ecke des K^2 und K_1^2 conjugirten Dreieckes, X die Polare von x für K^2 und K_1^2, so wird die Polare X' von x für irgend einen Kegelschnitt des Netzes, der *nicht* im Büschel $(K^2 K_1^2)$ enthalten ist, die X im Punkte $\mathfrak{x}$ schneiden.

Lehrsatz 2. *Die Kegelschnitte des Netzes schneiden auf einer Chordale dieselbe Involution aus.*

Unter Chordale soll eine Gerade S verstanden werden, welche zwei Schnittpunkte zweier Kegelschnitte des Netzes trägt. Die Gerade $\mathfrak{S}$, welche die zwei anderen Schnittpunkte

derselben Kegelschnitte trägt, heisse die zu S conjugirte Chordale.

Es mögen sich L^2, M^2 in den Punkten xx' von S schneiden und K^2, welcher nicht im Büschel $(L^2 M^2)$ liegt, soll S in yy' treffen. Dann schneiden die Büschel $(L^2 K^2)$ und $(M^2 K^2)$ auf S dieselbe Involution $\{S\}$ aus, deren zwei Paare xx', yy' sind. Ist daher X^2 irgend ein Kegelschnitt von $(M^2 K^2)$ und Y^2 ein solcher von $(L^2 K^2)$, so schneidet auch der Büschel $(X^2 Y^2)$ auf S die Involution $\{S\}$ aus.

Zusatz. Sind d, $\mathfrak{d}$ die Deckpunkte von $\{S\}$, so sind sie conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes. Jede Chordale enthält daher ein Paar conjugirter Pole des Netzes. Und umgekehrt ist die Verbindungsgerade zweier conjugirter Punkte d, $\mathfrak{d}$ eine Chordale. Denn alle Kegelschnitte des Netzes treffen $\overline{d\,\mathfrak{d}}$ in Punktepaaren, welche d, $\mathfrak{d}$ harmonisch trennen, also eine Involution bilden. Durch einen Punkt x von $\overline{d\,\mathfrak{d}}$ geht ein Büschel von Kegelschnitten des Netzes, welche alle auch den Punkt x' enthalten müssen, der x von d, $\mathfrak{d}$ harmonisch trennt.

Jede Gerade, auf welcher die Kegelschnitte des Netzes dieselbe Involution ausschneiden, ist eine Chordale.

Lehrsatz 3. *Schneiden die Büschel* (A^2) $(\mathfrak{A}^2)$ *des Netzes auf der Chordale* S *dieselben Paare* xx', yy' ... *der Involution* $\{S\}$ *aus, so schneiden einander je zwei entsprechende Kegelschnitte noch in zwei Punkten* $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ ..., *die auf der conjugirten Chordale* $\mathfrak{S}$ *die Involution* $\{\mathfrak{S}\}$ *bilden.*

Durch die Involution $\{S\}$ werden (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ projektivisch auf einander so bezogen, dass der Kegelschnitt L^2, welcher beiden Büscheln gemeinschaftlich ist, sich selbst entspricht. Schneiden sich nun A_x^2 und $\mathfrak{A}_x^2$ ausser in x' auf S noch in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, so ist $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{x}'} = \mathfrak{S}$ die zu S conjugirte Chordale, welche S in p schneiden möge. p' sei der zu p gehörige Punkt in $\{S\}$ und $\mathfrak{p}'$ möge p in $\{\mathfrak{S}\}$ entsprechen, dann gehen A_p^2 und $\mathfrak{A}_p^2$ durch p' und $\mathfrak{p}'$. Sind ferner l, l' die Schnittpunkte von L^2 mit S und $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ die mit $\mathfrak{S}$, so sind in den auf $\mathfrak{S}$ liegenden von $(A^2) \curlywedge (\mathfrak{A}^2)$ ausgeschnittenen Involutionen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, $p\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'$ drei coïncidirende homologe Paare, also sind die Involutionen identisch (Folgerung 2 zu Lehr-

satz 3 des § 1, Seite 163) mit der Involution $\{\mathfrak{S}\}$, welche die Kegelschnitte des Netzes auf $\mathfrak{S}$ ausschneiden.

Lehrsatz 4. *Sind S, $\mathfrak{S}$ zwei conjugirte Chordalen und wird S von einem Kegelschnitte A_1^2 des Netzes in s, s', die $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ geschnitten, so ist $\overline{s\,\mathfrak{s}} = S_1$ wieder eine Chordale und $s'\,\mathfrak{s}' = \mathfrak{S}_1$ ist die conjugirte Chordale.*

Denn sind A^2, $\mathfrak{A}^2$ irgend zwei Kegelschnitte, die sich auf S, $\mathfrak{S}$ schneiden, so ist $s\,\mathfrak{s}$ ein Paar der Involution, welche der Büschel $(A^2\,\mathfrak{A}^2)$ auf $S_1 = \overline{s\,\mathfrak{s}}$ ausschneidet (Seite 133, erster Absatz). Da nun s, $\mathfrak{s}$ auch Schnittpunkte von A_1^2 sind, so schneiden die Büschel $(A^2\,A_1^2)$ und $(\mathfrak{A}^2\,A_1^2)$ auf S_1 dieselbe Involution aus, also auch die Kegelschnitte des Netzes, dieselbe ist mithin eine Chordale. Da alle Kegelschnitte des Netzes, welche durch s gehen auch s', $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ enthalten, so ist $\overline{s'\,\mathfrak{s}'} = \mathfrak{S}_1$ die zu S_1 conjugirte Chordale.

Ein Paar conjugirter Chordalen vertritt also einen Kegelschnitt des Netzes.

Lehrsatz 5. *Die Punkte x, $\mathfrak{x}$, welche in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes conjugirte Pole sind, werden aus irgend einem, p, von ihnen durch eine Strahleninvolution projicirt.*

Ist nämlich $p\,\mathfrak{p}$ ein Paar solcher Punkte, so wird in dem Büschel (A^2) des Netzes ein bestimmter Kegelschnitt P^2 existiren, welcher die Gerade P durch $\mathfrak{p}$ zur Polaren von p besitzt. Ist (B^2) ein anderer Büschel des Netzes, welcher den Kegelschnitt P^2 nicht enthält, so wird in demselben ein bestimmter Kegelschnitt Q^2 existiren, dessen Polare von p dieselbe Gerade P ist. Der Büschel $(P^2\,Q^2)$ bestimmt nun eine Steiner'sche Verwandtschaft, für welche p ein Hauptpunkt ist, und in welcher x, $\mathfrak{x}$ entsprechende Punkte sind. Dieselben werden daher durch eine Strahleninvolution aus p projicirt (Kap. V, § 3, Lehrsatz 2, Seite 115).

§ 3. Betrachtungen an zwei Kegelschnittbüscheln, die nicht in einem Netze liegen.

Es seien (A^2), $(\mathfrak{A}^2)$ zwei Büschel, die nicht in *einem* Netze von Kegelschnitten liegen. Auf einer willkürlichen Geraden G schneidet dann (A^2) eine Involution $\{G\}$ und $(\mathfrak{A}^2)$ eine Involution $\{G'\}$ aus, die ein Paar $a\,a'$ gemeinschaftlich haben.

Die Kegelschnitte A_a^2, $\mathfrak{A}_a^2$, welche dieses Paar ausschneiden, schneiden einander noch in zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, und die Gerade $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \mathfrak{G}$ soll die zu G *conjugirte Sekante* heissen.

Hiedurch ist jeder Geraden G eine Sekante $\mathfrak{G}$ zugewiesen, derart, dass die conjugirte Sekante zu $\mathfrak{G}$ wieder G ist d. h. die conjugirten Sekanten entsprechen einander *involutorisch.*

Lehrsatz 1. *Sind $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$ zwei durch f gehende Geraden, denen dieselbe Sekante F conjugirt ist, so ist F conjugirt zu allen Strahlen des Büschels (f).*

Denn schneiden sich A_0^2, $\mathfrak{A}_0^2$ auf $\mathfrak{F}_0$ F, und A_1^2, $\mathfrak{A}_1^2$ auf $\mathfrak{F}_1$ F, so schneiden die beiden Büschel (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ auf F dieselbe Involution $\{F\}$ aus. Ordnet man die Kegelschnitte der Büschel einander zu, welche dasselbe Paar von $\{F\}$ projiciren, so sind die Büschel auf einander projektivisch bezogen, ihr Erzeugnis C^4 ist von der vierten Ordnung und F gehört offenbar dazu.

Der Punkt f gehört C^4 an. Denn die Schnittpunkte A_0^2, $\mathfrak{A}_0^2$ mit $\mathfrak{F}_0$ sind zwei Punkte von C^4, und der Schnittpunkt φ_0 von F mit $\mathfrak{F}_0$ ist ein dritter Punkt. Nach Folgerung 2 zu Lehrsatz 5 des § 1, Seite 164 ist f der vierte Punkt von C^4 auf $\mathfrak{F}_0$, denn φ_0 f ist ein Paar der Involution, welche die Schnittpunkte von A_1^2, $\mathfrak{A}_1^2$ auf $\mathfrak{F}_0$ bestimmen (Seite 133, erster Absatz). Sind daher A^2, $\mathfrak{A}^2$ irgend zwei einander entsprechende Kegelschnitte, die sich also auf F schneiden, so muss ihre zweite Sekante $\mathfrak{F}$ durch f gehen, da F durch φ_0 geht. $\mathfrak{F}$ ändert sich mit A^2, $\mathfrak{A}^2$. (Vgl. den Zusatz.)

Ist G eine zweite Gerade, auf der (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ dieselbe Involution $\{G\}$ ausschneiden, so sei h der Schnittpunkt von G mit F und g der ihm in $\{F\}$ entsprechende Punkt. Der in $\{G\}$ zu h entsprechende Punkt ist f. Denn sind A_x^2, $\mathfrak{A}_x^2$ irgend zwei Kegelschnitte, die sich auf F schneiden, so ist der Schnittpunkt der conjugirten Sekante $\mathfrak{F}_x$ von F mit G der Punkt, welcher h in der Involution entspricht, die der Büschel $(A_x^2\,\mathfrak{A}_x^2)$ auf G ausschneidet. Dieses ist aber die Involution $\{G\}$. Also gehen alle $\mathfrak{F}_x$ durch einen Punkt von G, dieser muss nach obigem mit f identisch sein.

Ist nun P^2 der Kegelschnitt von (A^2), welcher durch h geht und $\mathfrak{P}^2$ der von $(\mathfrak{A}^2)$, welcher auch h enthält, so schnei-

den sich P^2 und $\mathfrak{P}^2$ auch in g und f, und e sei der *vierte* Schnittpunkt. Dann ist $\overline{gf} = H$ eine dritte Gerade, auf der (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ dieselbe Involution ausschneiden. Denn seien A_x^2, $\mathfrak{A}_x^2$ wieder die sich auf $F\mathfrak{F}_x$ schneidenden Kegelschnitte, so ist hf ein Paar der Involution, welche der Büschel $(A_x^2\,\mathfrak{A}_x^2)$ auf H ausschneidet, denn h liegt auf F und f liegt auf $\mathfrak{F}_x$. Daher schneidet der Büschel $(A_x P^2) = (A^2)$ dieselbe Involution auf H aus, wie der Büschel $(\mathfrak{A}_x^2\mathfrak{P}^2) = (\mathfrak{A}^2)$.

Die zu G conjugirten Sekanten gehen durch g und die zu H conjugirten durch h. Es ist ersichtlich, dass weiter keine Gerade existiren kann, auf der die Büschel dieselbe Involution ausschneiden.

Zusatz. *Der Büschel (f) der Sekanten $\mathfrak{F}_x$ ist projektivisch den beiden Büscheln (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$, welche auf F dieselbe Involution ausschneiden, und zwar entsprechen $\mathfrak{F}_x$ die Kegelschnitte A_x^2, $\mathfrak{A}_x^2$, die sich auf $F\mathfrak{F}_x$ schneiden.* Denn ist φ, φ' der zu f im Büschel (A^2) resp. $(\mathfrak{A}^2)$ conjugirte Punkt, so erzeugen die Polarenbüschel $(\varphi) \barwedge (\varphi')$ von f in Bezug auf die Kegelschnitte (A^2), $(\mathfrak{A}^2)$, welche dieselben Paare von $\{P\}$ ausschneiden, einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch f geht, denn $\overline{\varphi f}$ ist Tangente von P^2 und $\overline{\varphi' f}$ Tangente von $\mathfrak{P}^2$. Die Polaren A_x, $\mathfrak{A}_x$ von f für A_x^2, $\mathfrak{A}_x^2$ schneiden einander aber in einem Punkte von $\mathfrak{F}_x$, also ist

$$\varphi(A_x) \barwedge \varphi'(\mathfrak{A}_x) \barwedge f(\mathfrak{F}_x),$$

da die drei Büschel dieselben Punkte von $\mathfrak{K}$ projiciren und ihre Scheitel auf $\mathfrak{K}$ liegen. Es ist mithin (f) auch projektivisch zu (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$, da diese projektivisch sind zu (φ) resp. (φ').

Lehrsatz 2. *Den Strahlen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eines Punktes s entsprechen die conjugirten Sekanten $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots$, welche einen Kegelschnitt Σ einhüllen.*

Es mögen sich A_i^2, $\mathfrak{A}_i^2$ auf S_i, $\mathfrak{S}_i$ schneiden und $\mathfrak{S}_1$ werde von S_i in x_i, von $\mathfrak{S}_i$ in $\mathfrak{x}_i$ getroffen; dann zeigt man vorerst leicht, dass $x_i\mathfrak{x}_i$ auf $\mathfrak{S}_1$ eine Involution $\{\mathfrak{S}_1\}$ beschreiben, welche auch von dem Büschel $(A_s^2\,\mathfrak{A}_s^2)$ ausgeschnitten wird, wenn A_s^2, $\mathfrak{A}_s^2$ die Kegelschnitte der beiden Büschel sind, welche s enthalten.

Denn macht man $(A_1^2 A_i^2 A_s^2) \barwedge (\mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_i^2 \mathfrak{A}_s^2)$, so sind die Schnittpunkte von A_1^2, $\mathfrak{A}_1^2$ auf $\mathfrak{S}_1$ zwei Punkte des Erzeugnisses C^4, die letzten zwei sind daher nach Folgerung 2 zu Lehrsatz 5 des § 1, Seite 164 ein Paar der Involution $\{\mathfrak{S}_1\}$, welche der Büschel $(A_s^2 \mathfrak{A}_s^2)$ auf $\mathfrak{S}_1$ ausschneidet. Da nun zu Folge des Lehrsatzes 7, § 1, Seite 165 durch die C^4 auch der Büschel $(A_1^2 \mathfrak{A}_1^2 B_1^2) \barwedge (A_i^2 \mathfrak{A}_i^2 B_i^2)$ ist, wenn B_1^2, B_i^2 die Kegelschnitte des Büschels $(A_1^2 \mathfrak{A}_1^2)$ resp. $(A_i^2 \mathfrak{A}_i^2)$ sind, welche s enthalten, so sieht man, dass B_1^2 mit $S_1 \mathfrak{S}_1$ und B_i^2 mit $S_i \mathfrak{S}_i$ identisch ist. Dieses letztere Geradenpaar $S_i \mathfrak{S}_i$ schneidet daher $\mathfrak{S}_1$ in den zwei Punkten x_i, $\mathfrak{x}_i$ von C^4, und mithin ist $x_i \mathfrak{x}_i$ ein Paar der Involution $\{\mathfrak{S}_1\}$.

Sei nun S_1' irgend ein anderer Strahl von s und $\mathfrak{S}_1'$ die ihm conjugirte Sekante, welche von $S_i \mathfrak{S}_i$ in $x_i' \mathfrak{x}_i'$ geschnitten wird. $x_i' \mathfrak{x}_i'$ durchlaufen dann auf $\mathfrak{S}_1'$ wieder eine Involution $\{\mathfrak{S}_1'\}$. Da nun x_i, x_i' auf $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ perspektivisch liegende gerade Gebilde beschreiben, so durchlaufen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{x}_i'$ projektivische Punktreihen auf $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$; also hüllt $\overline{\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_i'} = \mathfrak{S}_i$ einen Kegelschnitt Σ ein.

Lehrsatz 3. *Alle Kegelschnitte Σ haben drei feste Tangenten gemeinschaftlich, auf welchen die Kegelschnitte der Büschel (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ identische Involutionen ausschneiden. Von diesen Tangenten ist stets eine reell. Die zwei anderen können conjungirt imaginär sein.*

Denn seien s, s' irgend zwei Punkte der Ebene, Σ, Σ' die ihnen entsprechenden Kegelschnitte, so haben dieselben die zu $\overline{ss'} = S_0$ conjugirte Sekante $\mathfrak{S}_0$ als gemeinschaftliche Tangente. Daher ist stets noch eine reelle Tangente F beider Kegelschnitte vorhanden. (Kap. V, § 5, Seite 122.)

Seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ die beiden Strahlen von s resp. s', welchen F gleichzeitig conjugirt ist, und f sei der Schnittpunkt von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$. Dann ist klar, dass die Büschel (A^2), $(\mathfrak{A}^2)$ auf F dieselbe Involution $\{F\}$ ausschneiden, indem $F\mathfrak{F}$, $F\mathfrak{F}'$ die Sekanten der Kegelschnitte A^2, $\mathfrak{A}^2$ und A'^2, $\mathfrak{A}'^2$ sind. Ist umgekehrt s'' ein beliebiger Punkt der Ebene, so wird dem Strahle $\overline{s''f}$ die Gerade F als conjugirte Sekante zugehören (nach Lehrsatz 2), also berührt Σ'' auch F.

Dasselbe gilt von den zwei übrigen gemeinschaftlichen

Tangenten G, H von Σ, Σ'. Man kann auch direkt zeigen, dass Σ und Σ' für f dieselbe Polareninvolution besitzen.

Folgerung. *Ist x ein Punkt von F, so entsprechen allen Strahlen X von (x) als conjugirte Sekanten die Strahlen $\mathfrak{X}$ des Punktes $\mathfrak{x}$ von F, so dass $x\,\mathfrak{x}$ ein Paar der Involution $\{F\}$ ist.* Denn schneiden sich A^2, $\mathfrak{A}^2$ auf X und $\mathfrak{X}$ und sind $x\,\mathfrak{x}$ die Schnittpunkte von X, $\mathfrak{X}$ mit F, so sind $x\,\mathfrak{x}$ ein Paar der Involution, die der Büschel $(A^2\mathfrak{A}^2)$ auf F ausschneidet (Seite 133, erster Absatz). Da dasselbe für G und H gilt, so liegen die drei Involutionen $\{F\}$, $\{G\}$, $\{H\}$ so gegeneinander, dass drei Punkten x, x', x'', welche auf der Geraden X liegen, drei Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ in denselben entsprechen, die wieder auf einer geraden $\mathfrak{X}$ liegen. Hieraus folgt, dass von den drei Involutionen entweder *eine hyperbolisch* und *zwei elliptisch*, oder *alle drei hyperbolisch sein müssen*, und dass in dem letzten Falle die Deckpunkte auf vier Geraden liegen, welche ein Vierseit bilden, dessen Diagonaldreiseit das Dreiseit FGH ist.

Anmerkung. Aus dem Vorangehenden beweist man leicht, dass durch Polarisirung der Beziehung zwischen S, $\mathfrak{S}$ die Steiner'sche Verwandtschaft erhalten wird.

Zusätze. 1. Die Betrachtungen bleiben im Wesentlichen dieselben, wenn die Basispunkte des Büschels coïncidiren, auch dann, wenn der eine Büschel aus doppelt berührenden Kegelschnitten besteht.

2. Berühren sich auf F die Kegelschnitte A_0^2, $\mathfrak{A}_0^2$ in dem Punktepaar $a_0\,\mathfrak{a}_0$ von $\{F\}$, so fällt f auf F und alle Kegelschnitte Σ berühren F in f', wobei $f\,f'$ ein Paar von $\{F\}$ ist.

3. Haben die Büschel (A^2), $(\mathfrak{A}^2)$ einen Basispunkt f gemeinschaftlich, so ergibt sich F auf folgende Art. Es sei T eine beliebige durch f gehende Gerade, t ein sie durchlaufender Punkt. Dann haben die Kegelschnitte A_t^2, $\mathfrak{A}_t^2$ ausser T noch eine Sekante $\mathfrak{T}$, welche durch einen festen Punkt $\mathfrak{t}$ geht. Ist t_0 der Schnittpunkt von $A_{\mathfrak{t}}^2$ mit T, so ist $\mathfrak{t}\,\overline{t_0} = F$ die Gerade, auf der (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ dieselbe Involution $\{F\}$ ausschneiden und daher geht $\mathfrak{A}_{\mathfrak{t}}^2$ auch durch t_0. Denn es ist der Büschel $(A_t^2) \barwedge (\mathfrak{A}_t^2)$, und zu ihrem Erzeugnisse C^4 gehört T. Schneiden sich $A_{t_1}^2$, $\mathfrak{A}_{t_1}^2$ auf $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, so ist der vierte Punkt

von C^4 auf $\mathfrak{T}_1$ der Punkt t, welcher t_1 in der Involution zugeordnet ist, die $(A_{t_1}{}^2\, \mathfrak{A}_{t_1}{}^2)$ auf $\mathfrak{T}$ ausschneiden. Da nun dasselbe für irgend zwei Kegelschnitte $A_t{}^2$, $\mathfrak{A}_t{}^2$ gilt (Folgerung 2, zu Lehrsatz 5 des § 1, Seite 164) und die Sekante T stets durch t_0 geht, so muss $\mathfrak{T}$ durch t auf $\mathfrak{T}_1$ gehen. Ist t_0 der Schnittpunkt von $A_t{}^2$ mit T, so muss daher $\mathfrak{A}_{t_0}{}^2$ durch t gehen, ist also mit $\mathfrak{A}_t{}^2$ identisch. Auf $F = \overline{t_0\, t}$ sind dann $t\, t_0$ ein Paar jeder der Involutionen, welche die Büschel $(A_t{}^2\, \mathfrak{A}_t{}^2)$ ausschneiden, oder der Büschel $(A_t\, A_t{}^2)$ schneidet dieselbe Involution wie $(\mathfrak{A}_t{}^2\, \mathfrak{A}_t{}^2)$ auf F aus.

4. Haben (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ zwei Basispunkte auf der Geraden Δ gemeinschaftlich und sind D, $\mathfrak{D}$ die beiden anderen Geraden, welche die restlichen Basispunkte tragen, so wird jede Gerade S, welche durch den Schnittpunkt d von D mit $\mathfrak{D}$ geht und Δ in δ schneidet, in $d\,\delta$ das Paar enthalten, welches beiden Involutionen gemeinschaftlich ist, die (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ auf S ausschneiden.

Eine Gerade F, auf welcher beide Büschel dieselbe Involution ausschneiden, muss durch d gehen, denn auf einer Geraden S, die nicht durch d geht, schneidet (A^2) eine Involution aus, von der $\Delta\, D$ auch ein Paar enthalten, während $(\mathfrak{A}^2)$ die Involution ausschneidet, von der $\Delta\, \mathfrak{D}$ ein Paar enthalten. Die Involutionen können daher nicht identisch sein.

Es gehen durch d nur zwei Strahlen, auf denen beide Büschel identische Involutionen ausschneiden, nämlich die beiden Strahlen, welche die auf Δ gelegenen gemeinschaftlichen Basispunkte projiciren. Jeder der Strahlen wird von den Büscheln in einer parabolischen Involution geschnitten.

Ginge durch d noch ein Strahl A, auf dem (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ dieselbe Involution ausschneiden, dann liegen beide Büschel in *einem* Netze, d. h. durch die sechs Basispunkte geht ein Kegelschnitt K^2. Denn auf A mögen sich die Kegelschnitte A^2, $\mathfrak{A}^2$ schneiden, und S sei eine beliebige durch d gehende Gerade, welche Δ in δ schneidet, so schneiden (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ auch auf S dieselbe Involution aus. Denn $d\,\delta$ ist ein Paar der Involution, welche der Büschel $(A^2\, \mathfrak{A}^2)$ auf S ausschneidet (Seite 133, erster Absatz), daher schneiden die Büschel

$$(A^2,\, \Delta\, D) = (A^2) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}^2,\, \Delta\, \mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}^2)$$

auf S dieselbe Involution aus, indem der zerfallende Kegelschnitt ΔD durch $d\delta$ geht, welche Punkte auch auf $\Delta \mathfrak{D}$ liegen. Lässt man S mit D zusammenfallen, so folgt ebenso, dass auf D der Büschel $(\mathfrak{A}^2)$ eine Involution ausschneidet, von der die Basispunkte des Büschels (A^2) ein Paar sind. Daher geht ein Kegelschnitt K^2 des Büschels $(\mathfrak{A}^2)$ durch die auf D gelegenen Basispunkte von (A^2), derselbe gehört also auch (A^2) an. Die Richtigkeit der Umkehr ist klar.

§ 4. Biquadratische und cubische Involution.

1. Hilfssatz. *Sind A^2, $\mathfrak{A}^2$ irgend zwei Kegelschnitte der Ebene, X eine durch x gehende Gerade, welche A^2 und $\mathfrak{A}^2$ in $a\,a'$ resp. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'$ schneidet, so ist der Ort des Punktes x', welcher x in der Involution $\{X\}$ entspricht, deren Paare $a\,a'$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'$ sind, der Kegelschnitt des Büschels $(A^2\,\mathfrak{A}^2)$, welcher durch x geht.*

2. Hilfssatz. *Haben die Büschel (A^2), $(\mathfrak{A}^2)$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ gemeinschaftlich, und bezieht man sie so projektivisch auf einander, dass $\mathfrak{K}^2$ sich selbst entspricht, so erzeugen sie noch einen zweiten Kegelschnitt K^2.*

Zu dem Erzeugnisse C^4 der Büschel $(A^2) \barwedge (\mathfrak{A}^2)$ gehört $\mathfrak{K}^2$. Seien A_x^2, $\mathfrak{A}_x^2$ irgend zwei andere sich entsprechende Kegelschnitte der Büschel, die sich in x schneiden mögen, welcher Punkt also auf C^4 liegt. Ist X eine willkürliche, durch x gehende Gerade, so schneidet sie C^4 ausser in x und den beiden auf $\mathfrak{K}^2$ liegenden Punkten noch in dem Punkte x', so dass $x\,x'$ ein Paar der Involution auf X ist, welche der Büschel $(A^2\,\mathfrak{A}^2)$ auf X ausschneidet (Folgerung 2 zu Lehrsatz 5 des § 1, Seite 164). Daher liegt x' nach dem 1. Hilfssatze auf dem Kegelschnitt K^2 des Büschels $(A^2\,\mathfrak{A}^2)$, welcher durch x geht.

Definition. Die Kegelschnitte eines Büschels (A^2), von dessen Grundpunkten keiner auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ liegt, schneiden diesen in Quadrupeln $t\,u\,v\,w$, *welche in ihrer Gesammtheit die biquadratische Involution heissen.*

Lehrsatz 1. *Die biquadratische Involution auf $\mathfrak{K}^2$ kann ausgeschnitten werden durch unendlich viele Kegelschnittbüschel,*

von deren Basispunkten stets einer willkürlich in der Ebene gewählt werden kann.

Die biquadratische Involution auf $\mathfrak{K}^2$ sei ausgeschnitten durch den Büschel (A^2), das Quadrupel $t_i\, u_i\, v_i\, w_i$ durch den Kegelschnitt A_i^2. Sei nun $\mathfrak{g}$ ein willkürlicher Punkt der Ebene und $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{A}_2^2$ die Kegelschnitte, welche durch $\mathfrak{g}$ gehen und $t_1\, u_1\, v_1\, w_1$ resp. $t_2\, u_2\, v_2\, w_2$ enthalten, und $\mathfrak{A}_3^2$ sei der Kegelschnitt des Büschels $(\mathfrak{A}_1^2\, \mathfrak{A}_2^2)$, welcher t_3 enthält. Man beziehe nun den Büschel

$$(\mathfrak{A}_1^2\, \mathfrak{A}_2^2\, \mathfrak{A}_3^2) \barwedge (A_1^2\, A_2^2\, A_3^2),$$

so erzeugen dieselbe eine C^4, welche auch erzeugt wird durch die Büschel

$$(\mathfrak{A}_1^2\, A_1^2\, B_1^2) \barwedge (\mathfrak{A}_2^2\, A_2^2\, B_2^2),$$

wenn B_1^2, B_2^2 die Kegelschnitte der Büschel sind, welche den Punkt t_3 enthalten (Lehrsatz 7, § 1, Seite 165). Nun muss B_1^2 durch $t_1\, u_1\, v_1\, w_1$ und t_3 und B_2^2 durch $t_2\, u_2\, v_2\, w_2$ und t_3 gehen d. h. B_1^2 ist identisch mit B_2^2, identisch mit $\mathfrak{K}^2$. Nach dem zweiten Hilfssatze erzeugen daher die Büschel ausser $\mathfrak{K}^2$ noch einen Kegelschnitt K^2, welcher die Basispunkte der Büschel (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ enthält. Demzufolge schneiden sich entsprechende Kegelschnitte der Büschel (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ nur auf $\mathfrak{K}^2$, denn K^2 können sie nicht mehr schneiden, oder die biquadratische Involution wird auf $\mathfrak{K}^2$ auch durch den Büschel $(\mathfrak{A}^2)$ ausgeschnitten.

Zusatz. Da je zwei Kegelschnittbüschel, welche dieselbe biquadratische Involution aus $\mathfrak{K}^2$ ausschneiden, einander projektivisch sind, so nennen wir auch die biquadratische Involution *projektivisch* zu dem sie ausschneidenden Büschel.

Projicirt man die Quadrupel $t\, u\, v\, w$ aus einem Punkte x von $\mathfrak{K}^2$, so erhält man eine biquadratische Involution im Strahlenbüschel, welche eine Gerade in einer biquadratischen Punktinvolution schneidet.

Definition. Die Kegelschnitte eines Büschels (A^2), dessen ein Basispunkt auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ liegt, schneiden $\mathfrak{K}^2$ in Tripeln, *deren Gesammtheit cubische Involution heisst.*

Lehrsatz 2. *Sind $u\, v\, w$ die Tripel der cubischen Involution auf $\mathfrak{K}^2$ und $U\, V\, W$ die sie verbindenden Geraden*

(U trägt die Punkte v, w u. s. w.), *so hüllen alle Geraden $U V W$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ ein. $\mathfrak{C}^2$ heisst der Involutionskegelschnitt der cubischen Involution.*

Sei g der Basispunkt von (A^2), der auf $\mathfrak{K}^2$ liegt, und h, i, k seien die drei übrigen, H die Gerade, welche i, k enthält. Der Kegelschnitt A^2 möge in dem Tripel $u\,v\,w$ schneiden, und es sei x der Schnittpunkt von $\overline{gu}$ mit H und x' der von U mit H. Dann sind $x\,x'$ ein Paar der Involution auf H, welche der Büschel $(A^2\,\mathfrak{K}^2)$ auf ihr ausschneidet (Seite 133). Da nun alle Kegelschnitte des Büschels (A^2) die festen Punkte i, k enthalten, so beschreiben $x\,x'$ die Paare einer Involution auf H. Da dasselbe für die Schnittpunkte y, y' von $\overline{gu}$ und U mit $\overline{h\,k} = J$ gilt, so beschreiben x', y' auf H und J projektivische gerade Gebilde, indem x und y perspektivisch liegende Punktreihen durchlaufen. $U = \overline{x'\,y'}$ hüllt daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ ein, der auch H, J und $K = \overline{i\,h}$ berührt.

Folgerung. Die cubische Involution hat vier Deckpunkte: die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von $\mathfrak{C}^2$ und $\mathfrak{K}^2$ auf $\mathfrak{K}^2$.

Lehrsatz 3. *Die cubische Involution auf $\mathfrak{K}^2$ kann ausgeschnitten werden durch unendlich viele Kegelschnittbüschel, von deren Grundpunkten einer auf $\mathfrak{K}^2$ und einer in der Ebene willkürlich gewählt werden kann.*

Denn seien $u_1\,v_1\,w_1$, $u_2\,v_2\,w_2$ zwei Tripel der Involution ausgeschnitten durch die Kegelschnitte ${A_1}^2$, ${A_2}^2$, welche auf $\mathfrak{K}^2$ den Punkt g gemeinschaftlich haben, so lege man durch den willkürlichen Punkt $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{h}$ der Ebene den Kegelschnitt ${\mathfrak{A}_1}^2$, welcher $u_1\,v_1\,w_1$ und ${\mathfrak{A}_2}^2$, welcher $u_2\,v_2\,w_2$ enthält. Dann schneidet der Büschel $({\mathfrak{A}_1}^2\,{\mathfrak{A}_2}^2)$ auf $\mathfrak{K}^2$ eine cubische Involution aus, deren Involutionskegelschnitt mit $\mathfrak{C}^2$ die sechs Tangenten $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ gemeinschaftlich hat, mit ihm also identisch ist. Daher ist auch die cubische Involution, welche der Büschel $({\mathfrak{A}_1}^2\,{\mathfrak{A}_2}^2)$ aus $\mathfrak{K}^2$ ausschneidet, identisch mit der, welche (A^2) ausschneidet.

Zusatz. Die cubische Involution heisst projektivisch zu dem sie ausschneidenden Kegelschnittbüschel. Projicirt man die Tripel $u\,v\,w$ aus dem Punkte x von $\mathfrak{K}^2$, so erhält man

eine cubische Involution im Strahlenbüschel, die von einer Geraden in einer cubischen Punktinvolution geschnitten wird.

Lehrsatz 4. *Liegen von den Basispunkten eines Büschels* (A^2) *zwei auf dem Kegelschnitte* $\mathfrak{K}^2$ *auf der Geraden* Δ, *die anderen mögen auf* D *liegen, so schneiden die Kegelschnitte* A^2 *aus* $\mathfrak{K}^2$ *eine quadratische Involution aus, deren Pol* $\mathfrak{p}$ *auf* D *liegt.* (Die quadratische Involution ist die von uns stets blos als Involution bezeichnete, welche hier nur zum Unterschiede von den cubischen und biquadratischen so genannt werden möge.)

Denn sei A die Gerade, welche die zwei Schnittpunkte von A^2 und $\mathfrak{K}^2$ trägt, die nicht auf Δ liegen, so schneiden A und Δ die Gerade D in zwei Punkten $\mathfrak{p}, p$, welche ein Paar derjenigen Involution sind, die der Büschel $(A^2\,\mathfrak{K}^2)$ auf D ausschneidet (Seite 133). Da aber A^2 stets dasselbe Punktepaar von D enthält, so ist die Involution durch A^2 und $\mathfrak{K}^2$ festgelegt, also auch der Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ der Geraden A; da p fest bleibt.

Zusatz. Die quadratische Involution, welche der Büschel (A^2) aus $\mathfrak{K}^2$ ausschneidet, ist projektivisch zum Kegelschnittbüschel.

VIII. Kapitel.

Curven dritter Ordnung.

§ 1. Erzeugung der Curven dritter Ordnung.

Definition. Das Erzeugnis eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projektivischen Strahlenbüschels ist eine *Curve dritter Ordnung.*

Die Curve dritter Ordnung C^3 geht durch die Basispunkte des Kegelschnittbüschels und den Scheitel des Strahlenbüschels. Dieser heisst *Gegenpunkt* der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels. Die Tangente der C^3 im Scheitel $\mathfrak{p}$ des Strahlenbüschels ist jener Strahl von $(\mathfrak{p})$, welcher dem Kegelschnitte des Büschels (A^2) entspricht, der durch $\mathfrak{p}$ geht. Ist a einer der Grundpunkte des Büschels (A^2), so berührt der Kegelschnitt des Büschels (A^2), welcher dem Strahle $\overline{\mathfrak{p}\,a}$ entspricht, in a die C^3.

Hilfssatz. *Sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ *vier feste Punkte der Ebene* α, β, γ, δ *irgend welche vier feste Elemente eines einfachen Gebildes (Gerade, Büschel), so ist der Ort des Punktes* $\mathfrak{p}$, *für den* $\mathfrak{p}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge |\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,|$ *ist, ein Kegelschnitt* $\mathfrak{P}^2$ *durch* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.

Denn ist $\mathfrak{p}'$ irgend ein Punkt, der der Bedingung genügt, und $\mathfrak{P}^2$ der Kegelschnitt durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}'$, so wird für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}^2$ die Beziehung

$$\mathfrak{p}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge \mathfrak{p}'\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge |\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,|$$

stattfinden. $\mathfrak{P}^2$ ist aber durch seine Tangente in einem der Punkte z. B. $\mathfrak{a}$ bestimmt; denn ist $\mathfrak{t}$ ein Punkt derselben, so muss $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{t}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge |\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,|$ sein.

Lehrsatz 1. *Soll eine Curve dritter Ordnung* C^3 *durch die acht Punkte* $a, b, c, d,$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *gehen, so ist der Ort des*

Gegenpunktes $\mathfrak{p}$ *für den Büschel* (A^2) *der Kegelschnitte durch* a, b, c, d *ein Kegelschnitt* $\mathfrak{P}^2$ *des Büschels* $(\mathfrak{A}^2)$ *durch* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$.

Denn sind $A_\mathfrak{a}^2$, $A_\mathfrak{b}^2$, $A_\mathfrak{c}^2$, $A_\mathfrak{d}^2$ die Kegelschnitte des Büschels (A^2), welche durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gehen und $\mathfrak{p}$ der Gegenpunkt von $(a\,b\,c\,d)$, so muss

$$\mathfrak{p}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2\,A_\mathfrak{b}^2\,A_\mathfrak{c}^2\,A_\mathfrak{b}^2)$$

sein, d. h. der Ort von $\mathfrak{p}$ ist nach dem obigen Hilfssatze ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$ des Büschels $\mathfrak{A}^2$.

Ist F eine der Geraden, auf welchen (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ dieselbe Involution ausschneiden, f der Punkt, durch den die zu F conjugirten Sekanten gehen (Kap. VII, § 3), wobei f nicht auf F liegen möge, so geht $\mathfrak{P}^2$ durch f. Denn die Kegelschnitte der Büschel (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ sind projektivisch zugeordnet dem Strahlenbüschel (f), wenn man entsprechend setzt die Sekante durch f und die beiden Kegelschnitte von (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$, die sich auf ihr schneiden (Zusatz zu Lehrsatz 1 des § 3, Kap. VII). Daher ist

$$f\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2\,A_\mathfrak{b}^2\,A_\mathfrak{c}^2\,A_\mathfrak{b}^2),$$

also nach obigem auch

$$f\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge \mathfrak{p}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}),$$

d. h. der Punkt f liegt auf $\mathfrak{P}^2$.

Analog liegt für den Büschel $(\mathfrak{A}^2)$ durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ der Gegenpunkt p für die Curven $\mathfrak{C}^3$ durch a, b, c, d, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ auf dem Kegelschnitte P^2 des Büschels (A^2), der durch f geht.

Fig. 82. Durch Vermittlung von f und $\mathfrak{P}^2$ kann nun zu jedem Strahle X von $(\mathfrak{p})$ der Kegelschnitt von (A^2), welcher ihm entspricht, folgendermassen construirt werden. Ist $\mathfrak{g}$ der Schnittpunkt von X mit $\mathfrak{P}^2$, so ziehe man $\overline{f\,\mathfrak{g}}$, und der Kegelschnitt A^2, welcher dem Strahle $\overline{f\,\mathfrak{g}}$ in der projektivischen Beziehung zwischen (f), (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ entspricht, schneidet X in den beiden Punkten von C^3, welche auf X liegen.

Zusatz. 1. Der Kegelschnitt P^2 des Büschels (A^2), welcher durch f geht, schneidet nach Lehrsatz 1, § 3, Kap. VII, Seite 170 den $\mathfrak{P}^2$ auf F in den Punkten g, h und noch in einem Punkte $e = \mathfrak{e}$.

Der Punkt $e = \mathfrak{e}$ *liegt auf allen Curven* C^3, *deren Gegen-*

punkt $\mathfrak{p}$ *auf* $\mathfrak{P}^2$ *liegt.* Denn dem Strahle $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}}$ von $(\mathfrak{p})$ wird immer der Kegelschnitt P^2 von (A^2) entsprechen. Ist daher p der Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{e}}$ mit P^2, so geht C^3 durch p. Ebenso geht die $\mathfrak{C}^3$, deren Gegenpunkt für den Büschel $(\mathfrak{A}^2)$ der Punkt p ist, durch $\mathfrak{p}$.

2. Ausser den sechs Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{p}, \mathfrak{e}$ gibt es auf $\mathfrak{P}^2$ keinen Punkt, der C^3 angehört. Denn wäre $\mathfrak{x}$ ein solcher, so müsste $\overline{f\,\mathfrak{x}}$ Sekante zweier Kegelschnitte $A_x{}^2, \mathfrak{A}_x{}^2$ sein, die sich auf F schneiden. Da aber $\mathfrak{A}_x{}^2$ mit $\mathfrak{P}^2$ identisch ist, so muss $A_x{}^2$ mit P^2 zusammenfallen, also kann $\mathfrak{x}$ nur in $\mathfrak{e}$ liegen.

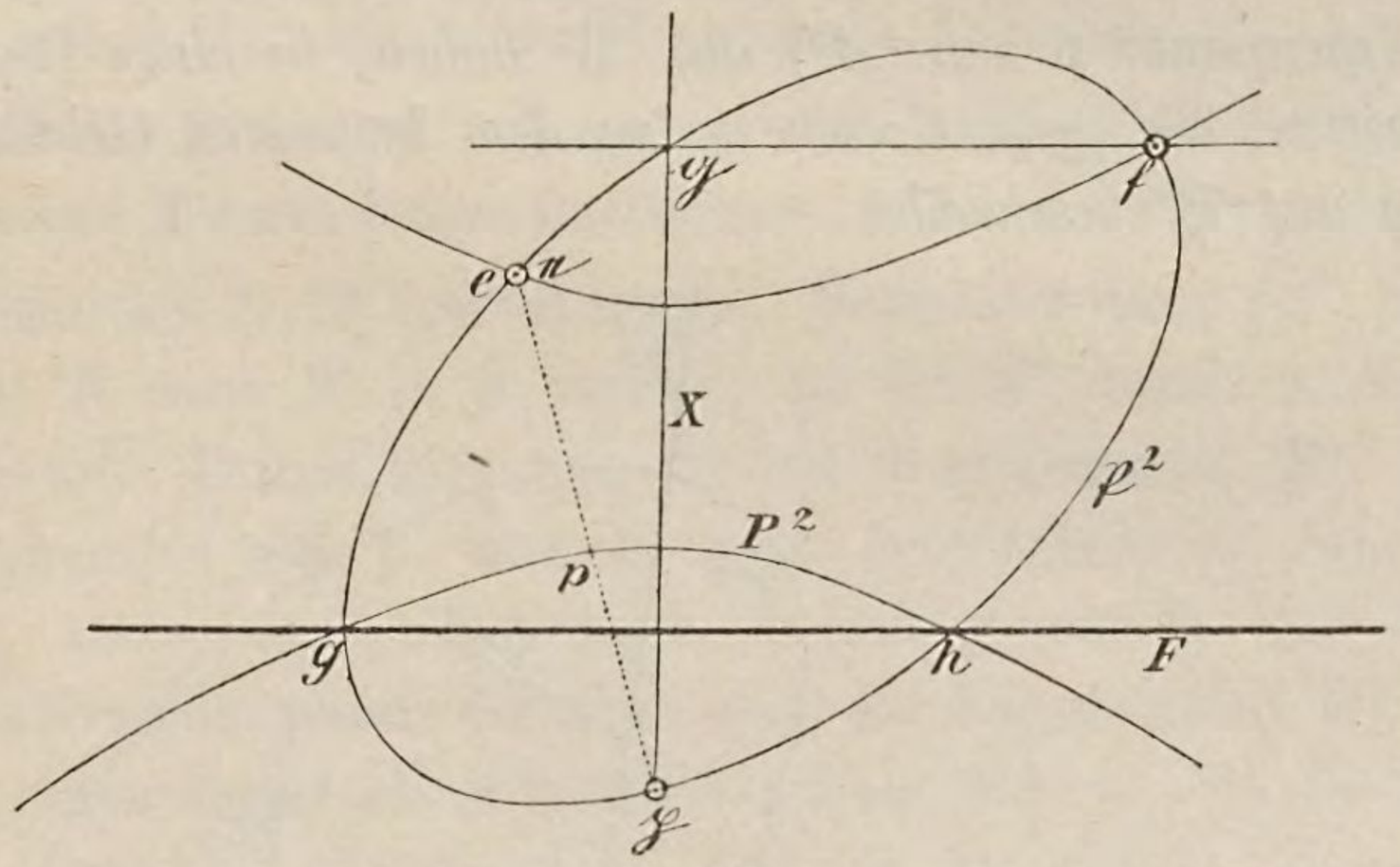


Fig. 82.

Lehrsatz 2. *Die Curve* C^3, *welche erzeugt wurde durch den Strahlenbüschel* $(\mathfrak{p}) \barwedge (A^2)$, *kann auch erzeugt werden durch den Büschel* (A^2) *und einen dazu projektivischen Kegelschnittbüschel* $(\mathfrak{A}^2)$, *von dessen Grundpunkten drei* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *willkürlich auf* C^3 *gewählt werden können.*

Natürlich wird vorausgesetzt, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nicht auf einer Geraden liegen. Denn sei A^2 ein Kegelschnitt von (A^2), welcher den Strahl $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{p}$ in x, x' schneidet, und $\mathfrak{A}^2$ sei der Kegelschnitt durch $x, x', \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, der A^2 noch auf der Sekante F treffen soll. Ist dann $(\mathfrak{A}^2)$ der Büschel durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, welcher auf F dieselbe Involution ausschneidet wie (A^2), so ist der Schnittpunkt f der conjungirten Sekanten der Kegelschnitte von (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$, welche sich auf F schneiden, mit $\mathfrak{p}$ identisch. Denn da

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \barwedge (A_{\mathfrak{a}}{}^2\, A_{\mathfrak{b}}{}^2\, A_{\mathfrak{c}}{}^2) \barwedge f(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$$

ist, so wäre auch

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \curlywedge f(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}),$$

und da f jedenfalls auf $\mathfrak{F}$ liegen muss, so wären die Büschel $(\mathfrak{p})$ und (f) perspektivisch, denn $\mathfrak{F}$ ist der gemeinschaftliche, sich selbst entsprechende Strahl beider. Die drei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ müssten also auf einer Geraden liegen.

Zu dem Erzeugnisse der Büschel $(A^2) \curlywedge (\mathfrak{A}^2)$ gehört ausser C^3 noch die Gerade F, und man sieht, dass der vierte Basispunkt $\mathfrak{d}$ von $(\mathfrak{A}^2)$ auf C^3 liegen muss.

Fig. 83. **Lehrsatz 3.** *Eine beliebige Gerade X, welche durch den Punkt $e = \mathfrak{e}$ geht, wird von der Gesammtheit der Curven, welche den Gegenpunkt $\mathfrak{p}$ von (A^2) auf $\mathfrak{P}^2$ haben, in einer Involution geschnitten, die projektivisch ist zu dem krummen Gebilde, welches $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{P}^2$ beschreibt.*

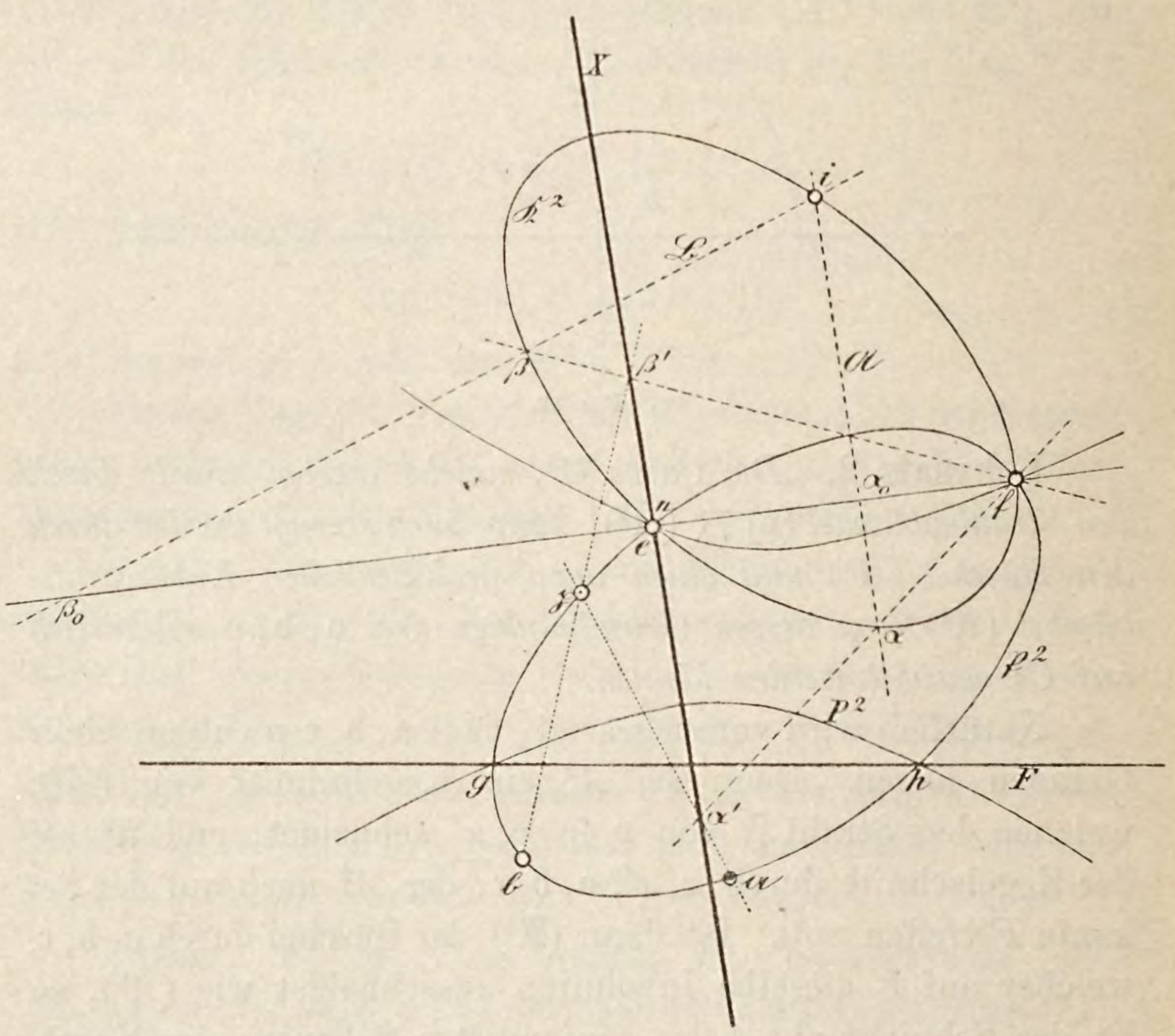


Fig. 83.

Zum Behufe des Beweises bestimmen wir vorerst die Schnittpunkte der C^3, welche dem Punkte $\mathfrak{p}$ entspricht, mit X.

Dieselben sind die zwei noch fehlenden Doppelpunkte des geraden Gebildes und der ihm projektivischen Involution auf X, welche $(\mathfrak{p})$ und (A^2) darauf ausschneiden. Einer der Doppelpunkte ist nämlich $e = \mathfrak{e}$. Projicirt man zu diesem Zweck das gerade Gebilde und die Involution aus f auf $\mathfrak{P}^2$, so erhält man in i den Pol der letzteren, und es wird $(i) \barwedge (f)$. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, welchen diese Büschel erzeugen, geht auch durch $e = \mathfrak{e}$ und f und schneidet $\mathfrak{P}^2$ noch in zwei Punkten, welche aus f auf X projicirt die zwei Schnittpunkte von C^3 bilden.

Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei der Basispunkte des Büschels $(\mathfrak{A}^2)$, welcher mit (A^2) auch die C^3 erzeugt (Lehrsatz 2), so mögen $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}}$, $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{b}}$ die X in α', β' schneiden, und die Kegelschnitte $A_{\mathfrak{a}}^2$, $A_{\mathfrak{b}}^2$ sollen auf X zwei Paare bestimmen, welche auf $\mathfrak{P}^2$ projicirt auf den Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von (i) liegen. Schneidet dann $\overline{f\beta'}$, $\overline{f\alpha'}$ den Strahl $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ in β und α, so ist $\mathfrak{K}^2$ durch α, β, i, e, f bestimmt. Durchläuft nun $\mathfrak{p}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$, so beschreiben α' und β' auf X zwei projektivische gerade Gebilde, also beschreiben auch α und β auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei projektivische gerade Gebilde und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ durchläuft einen Kegelschnittbüschel. Denn sind α_0, β_0 die Schnittpunkte von $\overline{fe}$ mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, und α_1, β_1 die Schnittpunkte eines zweiten Kegelschnittes $\mathfrak{K}_1^2$ mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, so wird der Büschel $(\mathfrak{K}^2\,\mathfrak{K}_1^2)$ sowol $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{B}$ in zwei projektivischen geraden Gebilden schneiden (Kap. VII, § 1, Lehrsatz 1, Seite 160), deren entsprechende Punkte $\alpha\,\alpha_1\,\alpha_0$ und $\beta\,\beta_1\,\beta_0$ sind, die also identisch sind mit den Gebilden, welche man durch Projektion von α' resp. β' aus f auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhält.

Der Büschel $(\mathfrak{K}^2)$ schneidet daher $\mathfrak{P}^2$ in einer Involution (Lehrsatz 4, Kap. VII, § 4, Seite 178), welche aus f auf X projicirt die Schnittpunktepaare der C^3 mit X liefert. Nach dem Zusatze desselben Lehrsatzes ist die Involution projektivisch zu dem Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}^2)$, also auch zu dem geraden Gebilde, das α auf $\mathfrak{A}$ oder α' auf X beschreibt, daher auch projektivisch zum krummen Gebilde, das $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{P}^2$ durchläuft.

Zusatz. Die Curven $\mathfrak{C}^3$, welche man erhält, wenn p als

Gegenpunkt des Büschels $(\mathfrak{A}^2)$ den Kegelschnitt P^2 durchläuft, schneiden X in derselben Involution $\{X\}$, wie die Curven C^3.

Denn sind p_0, $\mathfrak{p}_0$ die Schnittpunkte von P^2 und $\mathfrak{P}^2$ mit X, so ist $p_0\,\mathfrak{p}_0$ ein Paar von $\{X\}$, da die C^3, welche $\mathfrak{p}_0$ entspricht, durch p_0 geht und umgekehrt. (Zusatz 1 zu Lehrs. 1.) Die Curve C^3, welche man aber erhält, wenn $\mathfrak{p}$ nach f rückt, ist identisch mit der $\mathfrak{C}^3$, welche erhalten wird, wenn p auf f fällt (Lehrsatz 2), sie schneidet daher X in einem zweiten Paare der Involution $\{X\}$.

Lehrsatz 4. *Jede Curve dritter Ordnung C_1^3, welche erzeugt wird durch den Kegelschnittbüschel (A^2) und den ihm projektivischen Strahlenbüschel $(\mathfrak{p}_1)$, kann auch erzeugt werden durch einen Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{A}^2)$, dessen Basispunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf C_1^3 willkürlich gewählt werden können, deren Gegenpunkt p_1 dann vollständig bestimmt ist.*

Hat man $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf C_1^3 willkürlich gewählt, so bestimmt der Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{A}^2)$ durch diese vier Punkte mit (A^2) zusammen die Gerade F, auf welcher beide dieselbe Involution $\{F\}$ ausschneiden, und den ihr entsprechenden Punkt f. Der Punkt $\mathfrak{p}_1$ liegt nach Lehrsatz 1, Seite 179 auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{P}^2$ des Büschels $(\mathfrak{A}^2)$, der durch f geht. Der Kegelschnitt P^2 des Büschels (A^2) durch f schneidet dann $\mathfrak{P}^2$ ausser auf F noch in dem Punkte $e = \mathfrak{e}$. Sei X eine durch $e = \mathfrak{e}$ gehende Gerade und q, r die Schnittpunkte von C_1^3 mit X, also ein Paar der Involution $\{X\}$.

Denkt man sich nun die Curven $\mathfrak{C}^3$ erzeugt durch den Büschel $(\mathfrak{A}^2)$ und ihren Gegenpunkt p auf P^2, so möge durch das Paar q, r von $\{X\}$ die Curve $\mathfrak{C}_1^3$ gehen, deren Gegenpunkt p_1 auf P^2 bestimmt ist. Lässt man nun q, r die Involution $\{X\}$ durchlaufen, so beschreiben $\mathfrak{p}_1$ und p_1 zwei zu einander projektivische krumme Gebilde auf $\mathfrak{P}^2$ und P^2. Projicirt man beide aus $e = \mathfrak{e}$, so erhält man zwei projektivische Strahlenbüschel $\mathfrak{e}(\mathfrak{p}_1)$ und $e(p_1)$, welche in

$$\overline{\mathfrak{e}f} = \overline{ef}, \quad \overline{\mathfrak{e}g} = \overline{eg}, \quad \overline{\mathfrak{e}h} = \overline{eh}$$

drei Deckstrahlen haben, also coïncidiren, d. h. der Punkt p_1 ist der Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{e}\,\mathfrak{p}_1}$ mit P^2.

Halten wir nun C_1^3 fest, also auch $\mathfrak{p}_1$ und p_1, da $\overline{\mathfrak{e}\,\mathfrak{p}_1 p_1}$ festbleibt, so möge C_1^3 die Strahlen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ durch $e = \mathfrak{e}$ in den Paaren $q_1 r_1, q_2 r_2, q_3 r_3, \ldots$ schneiden, dann schneidet auch $\mathfrak{C}_1^3$, welche erzeugt wird durch den Büschel $(\mathfrak{A}^2) \barwedge (p_1)$, alle die Geraden in denselben Punktepaaren, d. h. $\mathfrak{C}_1^3$ ist identisch mit C_1^3, wodurch der *Fundamentalsatz* über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung bewiesen ist.

Folgerungen. **1.** Wird die Curve C^3 erzeugt durch den Büschel $(A^2) \barwedge (\mathfrak{p})$, so kann sie auch erzeugt werden durch den Büschel $(\mathfrak{A}^2) \barwedge (p)$, wobei von dem Büschel $(\mathfrak{A}^2)$ drei Basispunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und der Gegenpunkt p auf C^3 willkürlich gewählt werden können.

Denn ist P^2 der Kegelschnitt des Büschels (A^2), der durch p geht, und schneidet $\overline{p\,\mathfrak{p}}$ den P^2 in $e = \mathfrak{e}$, so ist durch $\mathfrak{p}, \mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ der Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$ bestimmt, welcher P^2 noch in f, g, h schneidet. Der Büschel $(\mathfrak{A}^2)$, welcher durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ geht und auf $\overline{gh} = F$ dieselbe Involution ausschneidet, wie (A^2), erzeugt mit (p) die C^3.

2. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ irgend vier Punkte von C^3, so gehört ihnen ein bestimmter Gegenpunkt p zu. Ist x ein Punkt von C^3, so schneidet $p\,x$ dieselbe noch in x' und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, x, x'$ liegen auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}_x^2$, d. h. ein Kegelschnitt kann C^3 nur in *sechs* Punkten schneiden.

Sind die sechs Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit C^3 bestimmt, so schneidet die Verbindungsgerade irgend zweier die C^3 in dem Gegenpunkte der vier übrigen.

3. Jeder Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, der durch drei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ einer C^3 geht, schneidet dieselbe noch in drei Punkten, von denen wenigstens einer reell ist. Zwei können conjungirt imaginär sein. Denn nimmt man $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ zu Hauptpunkten einer Steiner'schen Verwandtschaft an, so wird die C^3 wieder in eine $\mathfrak{C}^3$ verwandelt, die durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ geht. Denn wird C^3 erzeugt durch $(\mathfrak{A}^2) \barwedge (p)$, wobei $(\mathfrak{A}^2)$ drei der Grundpunkte in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ hat, so wird dem Kegelschnittbüschel in der Steinerschen Verwandtschaft ein Strahlenbüschel $(\mathfrak{p})$ entsprechen, dem Strahlenbüschel (p) ein Kegelschnittbüschel (A^2) durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, und es wird $(A^2) \barwedge (\mathfrak{p})$ sein. Diese erzeugen die $\mathfrak{C}^3$.

Dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ wird eine Gerade G entsprechen, welche $\mathfrak{C}^3$ in den drei Punkten schneidet, die $\mathfrak{K}^2$ mit C^3 gemeinschaftlich hat.

Lehrsatz 5. *Zieht man von einem Punkte t der Ebene Tangenten an die Kegelschnitte C^2 eines Büschels (C^2), so ist der Ort der Berührungspunkte eine Curve dritter Ordnung C^3.*

Denn ist t der conjugirte Punkt von t für alle Kegelschnitte des Büschels (C^2), so ist der Ort auch das Erzeugnis des Kegelschnittbüschels (C^2) und des ihm projektivischen Polarenbüschel (t).

Die C^3 geht durch t und berührt daselbst den Kegelschnitt C_t^2 des Büschels, der durch t geht. Auch die Grundpunkte des Büschels (C^2) liegen auf C^3, und die Geraden, welche sie mit t verbinden, berühren die C^3 in ihnen.

Lehrsatz 6. *Von einem Punkte t der C^3 gehen höchstens vier Tangenten an dieselbe. Ihre Berührungspunkte liegen auf einem Kegelschnitt C_t^2, der die C^3 in t berührt.*

Denn wird C^3 durch den Büschel $(B^2) \barwedge (t)$ erzeugt, so sei τ der zu t in Bezug auf den Büschel (B^2) conjugirte Punkt. Dann erzeugen die projektivischen Büschel $(t) \barwedge (\tau)$ einen Kegelschnitt C_t^2, der durch t geht und die Gerade T von (t) berührt, welche dem Strahle $\overline{\tau t}$ von (τ) homolog ist. Da T auch dem Kegelschnitte B_t^2 des Büschels (B^2) entspricht, so ist T Tangente von C^3 und C^2 in t. (Vergl. den Anfang des § 1.)

Ist nun a ein Schnittpunkt von C_t^2 mit C^3, so muss die Gerade $\overline{ta}$ in a von dem Kegelschnitte B_a^2 berührt werden, da $\overline{\tau a}$ Polare von t für B_a^2 ist. Daher schneidet $\overline{ta}$ die C^3 in a in zwei zusammenfallenden Punkten. Aus Folgerung 2 zu Lehrsatz 4 folgt, dass es nur vier solche Punkte a geben kann.

Der Kegelschnitt C_t^2 heisst *conische Polare* des Punktes t für die Curve dritter Ordnung C^3. Schneidet der Strahl X durch t den ihm entsprechenden B_u^2 in den Punkten u, v von C^3 und C_t^2 in ξ, so ist $[tu\xi v]$ ein harmonisches Quadrupel; denn $\overline{\tau\xi}$ ist die Polare von t für B_u^2.

§ 2. Der Curvenbüschel dritter Ordnung.

Definition. Die Gesammtheit der Curven dritter Ordnung, welche durch *acht Punkte gehen*, von denen keine vier auf einer Geraden liegen, heisst *Curvenbüschel dritter Ordnung.*

Lehrsatz 1. *Die Curven eines Büschels gehen alle durch einen neunten festen Punkt, der durch die acht angenommenen bestimmt ist.*

Denn seien a, b, c, d vier solche Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ eben solche vier von den acht angenommenen Punkten, so kann irgend eine durch $a, b, c, d, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gehende C^3 erzeugt werden durch den Kegelschnittbüsehel (A^2), dessen Grundpunkte a, b, c, d sind und einen dazu projektivischen Strahlenbüschel $(\mathfrak{p})$, dessen Scheitel $\mathfrak{p}$ auf einem bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$ des Büschels $(\mathfrak{A}^2)$ durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ liegt.

Ebenso kann aber C^3 erzeugt werden durch den Büschel $(\mathfrak{A}^2)$ und einen dazu projektivischen Strahlenbüschel (p), wobei p auf einem Kegelschnitt P^2 von (A^2) liegt. Die Gerade $\overline{p\,\mathfrak{p}}$ geht dann durch einen Schnittpunkt $e = \mathfrak{e}$ von $\mathfrak{P}^2$ und P^2, der auch auf C^3 liegt. Dieser Punkt $e = \mathfrak{e}$ liegt mithin auf allen Curven des Büschels.

Zusatz. Ausser den neun Grundpunkten des Büschels haben die Curven keinen Punkt gemeinschaftlich.

Denn wäre q ein solcher, den C^3 und $C_1{}^3$ gemeinschaftlich hätten, der nicht auf $\mathfrak{P}^2$ liegen kann (Folgerung 2 zu Lehrsatz 4, § 1, Seite 185), so möge $\overline{\mathfrak{p}\,q}$ den $\mathfrak{P}^2$ in $\mathfrak{g}$ und $\overline{\mathfrak{p}_1\,q}$ den $\mathfrak{P}^2$ in $\mathfrak{g}_1$ schneiden. Dann müssten $\overline{f\,\mathfrak{g}}$ und $\overline{f\,\mathfrak{g}_1}$ die Sekanten der Kegelschnitte $A_q{}^2$, $\mathfrak{A}_q{}^2$ sein, was unmöglich ist, da sich diese Kegelschnitte auf F schneiden müssen. (Construktion der C^3 auf Grund des Lehrsatzes 1, Seite 180.)

Folgerungen. 1. Zwei Curven dritter Ordnung können einander höchstens in *neun* Punkten schneiden.

2. Die *neun* Grundpunkte eines Büschels sind vollständig gleichberechtigt. Jede C^3, welche durch irgend *acht* von ihnen geht, enthält auch den *neunten.*

3. Durch irgend einen Punkt x der Ebene geht eine bestimmte Curve $C_x{}^3$ des Büschels (C^3). Der ihr entsprechende

Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{P}^2$ wird so bestimmt. Für die Curve, welche durch den Büschel (A^2) erzeugt wird und durch $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, x gehen soll, liegt der Scheitel des zu dem Büschel $(A^2) \barwedge (\mathfrak{p}')$ auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{P}'^2$ durch $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, x, so dass

$$\mathfrak{p}'(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,x) \barwedge (A_\mathfrak{b}^2\, A_\mathfrak{c}^2\, A_\mathfrak{b}^2\, A_x^2)$$

ist. Schneiden einander $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}'^2$ ausser in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ noch in $\mathfrak{p}$, so wird für diesen Punkt sowol

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2\, A_\mathfrak{b}^2\, A_\mathfrak{c}^2\, A_\mathfrak{b}^2),$$

als auch

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,x) \barwedge (A_\mathfrak{b}^2\, A_\mathfrak{c}^2\, A_\mathfrak{b}^2\, A_x^2),$$

daher ist

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,x) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2\, A_\mathfrak{b}^2\, A_\mathfrak{c}^2\, A_\mathfrak{b}^2\, A_x^2),$$

d. h. die C^3, welche die projektivischen Büschel $(\mathfrak{p})$ und (A^2) erzeugen, geht durch x und gehört dem Büschel an.

4. Durch *neun* Punkte, von denen keine vier auf einer Geraden liegen, ist eine Curve dritter Ordnung im Allgemeinen bestimmt.

Denn nimmt man acht von denselben zur Bestimmung eines Büschels (C^3), so geht durch den letzten eine Curve des Büschels. Nur wenn dieser mit dem *neunten* Grundpunkt des Büschels zusammenfiele, würde die C^3 nicht bestimmt sein.

Definition. *Der Curvenbüschel heisst projektivisch zu dem krummen Gebilde, das $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{P}^2$ oder p auf P^2 beschreibt.*

Lehrsatz 2. *Eine Gerade, welche zwei Grundpunkte des Büschels enthält, wird von den Curven des Büschels (C^3) in einem zu demselben projektivischen geraden Gebilde geschnitten.*

Fig. 84. Es möge G die Basispunkte a, e tragen und x sei der dritte Schnittpunkt der C^3, welche dem Punkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}^2$ zugehört. Wir construiren den Punkt x, indem wir die beiden projektivischen geraden Gebilde, in welchen G von (A^2) und $(\mathfrak{p})$ geschnitten wird, aus f auf $\mathfrak{P}^2$ projiciren. Schneidet $A_\mathfrak{a}^2$, $A_\mathfrak{b}^2$ die G in $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ und $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{a}}$, $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{b}}$ die G in $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, so sind $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}_0$, $e\mathfrak{e}$ drei Paar entsprechender Punkte der geraden Gebilde auf G, und wenn $\overline{f\mathfrak{a}_0}$, $\overline{f\mathfrak{b}_0}$, $\overline{f\mathfrak{a}'}$, $\overline{f\mathfrak{b}'}$ den $\mathfrak{P}^2$ in α, β α', β' treffen, so mögen sich $\overline{\beta\alpha'}$, $\overline{\alpha\beta'}$ in t schneiden, dann ist $\overline{et} = T$ die Vervollständigungsaxe der krummen projekti-

vischen Punktreihen auf $\mathfrak{P}^2$. Ist ξ der Schnittpunkt von $\mathfrak{P}^2$ mit T, so schneidet $\overline{f\xi}$ die G in x.

Durchläuft nun C^3 den Büschel, $\mathfrak{p}$ also $\mathfrak{P}^2$, so beschreiben $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ auf G, also auch α', β' auf $\mathfrak{P}^2$ zu einander projektivische Punktreihen, also durchläuft t einen Kegelschnitt durch α, β, f, e, mithin beschreibt $\overline{et}$ einen zu $\mathfrak{p}$ projektivischen Strahlenbüschel, daher durchläuft auch ξ auf $\mathfrak{P}^2$ und x auf G eine zu $\mathfrak{p}$ projektivische Punktreihe, die mithin auch zum Curvenbüschel (C^3) projektivisch ist.

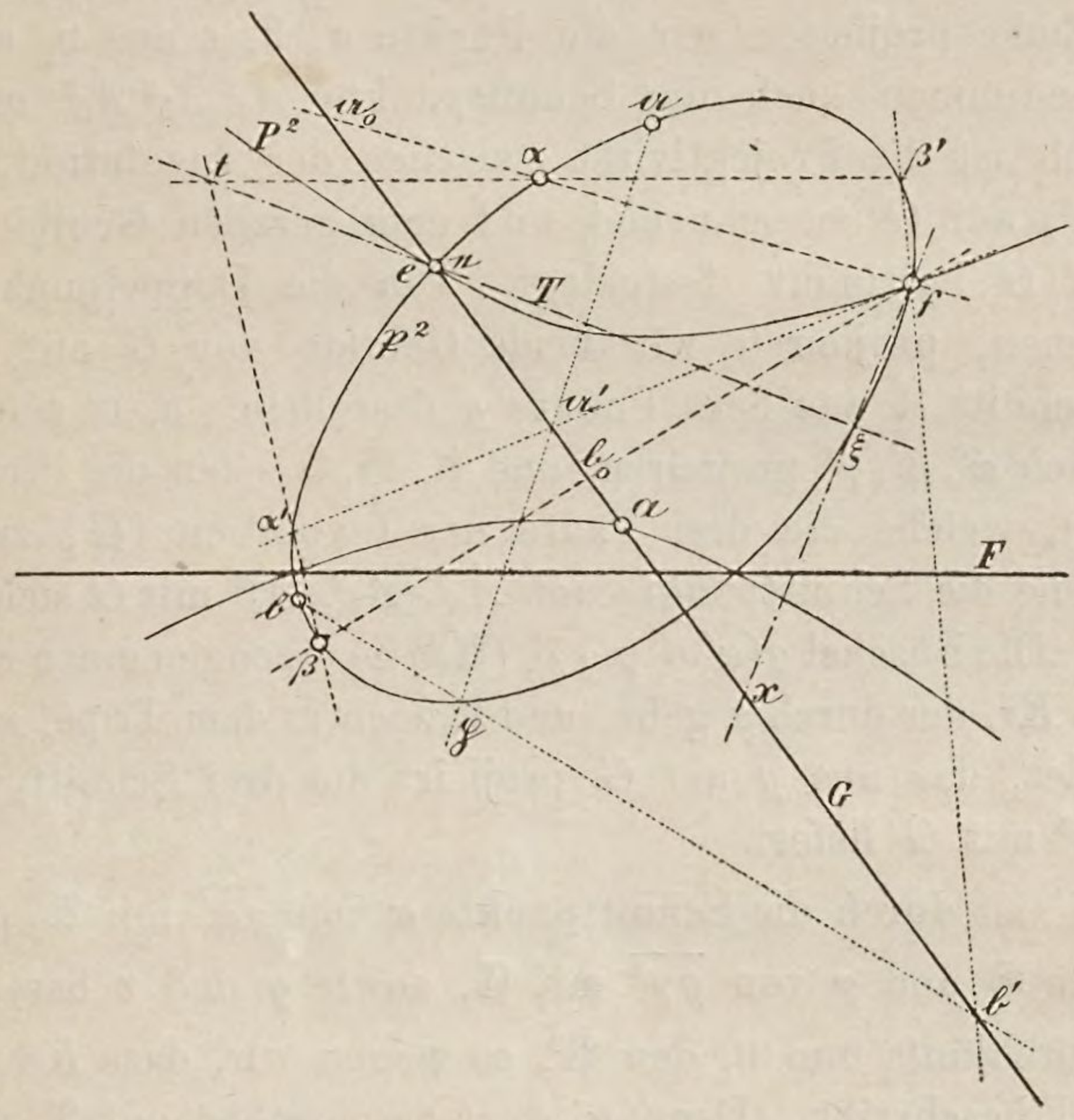


Fig. 84.

Zusatz. Da P^2 die C_x^3 noch in p, dem Gegenpunkte von $\mathfrak{abcd}$ schneidet, so ist x der Gegenpunkt von $bcdp$ für die C_p^3 und man kann daher obigen Lehrsatz auch so aussprechen: *Sind* $a, b, c, d, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, e$ *neun Grundpunkte eines Büschels* (C^3) *und* p *der Gegenpunkt von* $\mathfrak{abcd}$ *für eine Curve* C^3, *so durchläuft der Gegenpunkt* x *des Quadrupels* $bcdp$ *das gerade Gebilde* $\overline{ae}$, *welches zum Büschel* (C^3) *projektivisch ist.*

Lehrsatz 3. *Der Curvenbüschel* (C^3) *schneidet eine durch*

einen seiner Grundpunkte gehende Gerade in einer zu ihm projektivischen Involution.

Der Beweis folgt aus der Definition der Projektivität im Büschel (C^3) mit Rücksicht auf den Lehrsatz 3 des § 1.

Lehrsatz 4. *Ein Curvenbüschel (C^3) schneidet eine Gerade G der Ebene in einer zu ihm projektivischen cubischen Involution.*

Fig. 85. Es sei $\mathfrak{P}^2$ der Ort der Gegenpunkte $\mathfrak{p}$ des Quadrupels $abcd$ der Grundpunkte von (C^3). Wir bestimmen die Schnittpunkte der C_1^3 mit G, welcher der Punkt $\mathfrak{p}_1$ zugehört. Zu dem Ende projiciren wir die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{p}_1$ auf G und bestimmen auch die Schnittpunkte von $A_\mathfrak{a}^2\, A_\mathfrak{b}^2\, A_\mathfrak{c}^2$ mit G. Dadurch ist die Projektivität zwischen der Involution $\{G\}$, die (A^2) auf G ausschneidet und dem geraden Gebilde, das $(\mathfrak{p})$ auf G bestimmt, festgelegt. Um die Doppelpunkte zu bestimmen, projiciren wir beide Gebilde von G auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ aus dem Punkte g desselben. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mögen sich nach α', β', γ' projiciren, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ seien die Strahlen von $(\mathfrak{r})$, welche die drei Paare der Involution $\{G\}$ tragen, in welche die Schnittpunkte von $A_\mathfrak{a}^2$, $A_\mathfrak{b}^2$, $A_\mathfrak{c}^2$ mit G sich projiciren. Die Büschel $g(\alpha'\,\beta'\,\gamma') \barwedge (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ erzeugen einen Kegelschnitt K^2, der durch g geht, und $\mathfrak{K}$ noch in dem Tripel $u_1 v_1 w_1$ schneidet, das aus g auf G projicirt die drei Schnittpunkte von C_1^3 mit G liefert.

K^2 ist durch die Schnittpunkte α von $\overline{g\alpha'}$ mit $\mathfrak{A}$, β von $\overline{g\beta'}$ mit $\mathfrak{B}$ und γ von $\overline{g\gamma'}$ mit $\mathfrak{C}$, sowie g und $\mathfrak{r}$ bestimmt.

Durchläuft nun $\mathfrak{p}_1$ den $\mathfrak{P}^2$, so zeigen wir, dass K^2 einen Büschel beschreibt. Denn α, β, γ beschreiben auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu einander projektivische gerade Gebilde, in denen der Schnittpunkt $\mathfrak{r}$ nicht allen dreien gemeinschaftlich ist. Es hüllen nun die Geraden $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\beta\gamma}$ zwei Kegelschnitte ein, die $\mathfrak{B}$ zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Sie haben daher noch wenigstens *eine* reelle gemeinschaftliche Tangente T, die nicht durch $\mathfrak{r}$ gehen kann. Sie geht aber auch nicht durch g. Schneidet sie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, so entsprechen diese Lagen dem Punkte $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{P}^2$ und den Projektionen $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ auf G. Schneidet $\overline{g\alpha'}$, $\overline{g\beta'}$, $\overline{g\gamma'}$ die T in α_1, β_1, γ_1, so ersieht man,

dass K^2 auf T die Involution $\{T\}$ conjugirter Pole besitzt, welche den projektivischen geraden Gebilden $|\alpha_1 \beta_1 \gamma_1| \barwedge |\alpha_0 \beta_0 \gamma_0|$ adjungirt ist. Da diese die Projektion der Polinvolution von $\mathfrak{P}^2$ auf G ist, indem $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1|$ sich nach $|\alpha_1 \beta_1 \gamma_1|$ und $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0 \mathfrak{c}_0|$

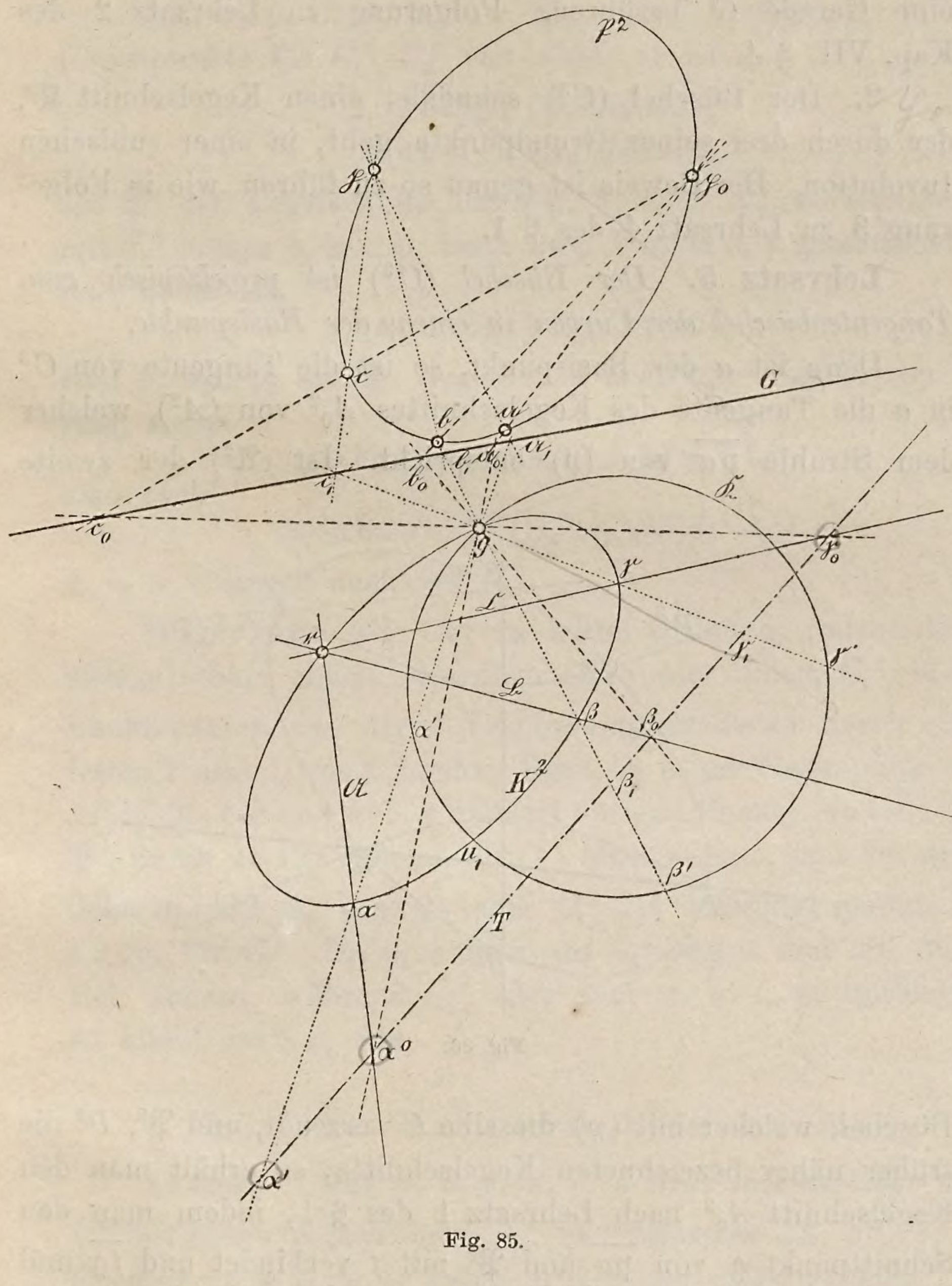


Fig. 85.

nach $|\alpha_0 \beta_0 \gamma_0|$ projicirt, so ist $\{T\}$ unabhängig von der Lage von $\mathfrak{p}$, also auch von K^2, und alle K^2 gehen daher durch g, $\mathfrak{x}$ und die Deckpunkte von $\{T\}$ bilden daher einen Büschel. Mithin durchlaufen uvw auf $\mathfrak{K}^2$ eine zum Büschel

(C^3) projektivische cubische Involution, da der Büschel (K^2) projektivisch ist zur geraden Punktreihe $|\alpha|$ und diese zum krummen Gebilde, das $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{P}^2$ beschreibt.

Folgerung 1. Im Büschel (C^3) sind vier Curven, welche eine Gerade G berühren. Folgerung zu Lehrsatz 2 des Kap. VII, § 4.

2. Der Büschel (C^3) schneidet einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, der durch drei seiner Grundpunkte geht, in einer cubischen Involution. Der Beweis ist genau so zu führen, wie in Folgerung 3 zu Lehrsatz 4 des § 1.

Lehrsatz 5. *Der Büschel (C^3) ist projektivisch zum Tangentenbüschel der Curven in einem der Basispunkte.*

Fig. 86. Denn ist a der Basispunkt, so ist die Tangente von C^3 in a die Tangente des Kegelschnittes A_0^2 von (A^2), welcher dem Strahle $\overline{\mathfrak{p}a}$ von $(\mathfrak{p})$ entspricht. Ist $(\mathfrak{A}^2)$ der zweite

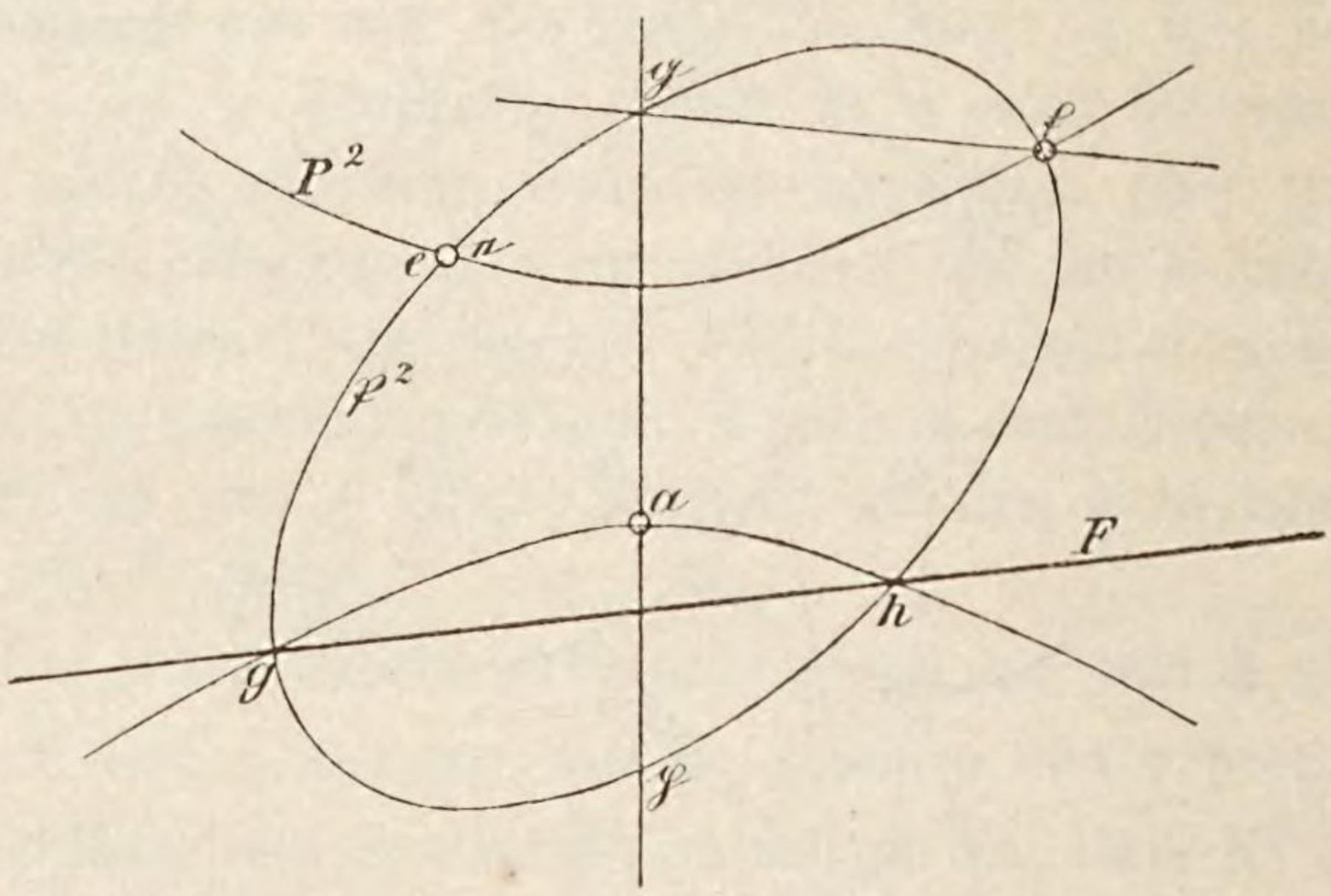


Fig. 86.

Büschel, welcher mit (p) dieselbe C^3 erzeugt, und $\mathfrak{P}^2$, P^2 die früher näher bezeichneten Kegelschnitte, so erhält man den Kegelschnitt A_0^2 nach Lehrsatz 1 des § 1, indem man den Schnittpunkt $\mathfrak{g}$ von $\overline{\mathfrak{p}a}$ und $\mathfrak{P}^2$ mit f verbindet und $\overline{f\mathfrak{g}}$ und F als die zwei Sekanten zweier Kegelschnitte von (A^2) und $(\mathfrak{A}^2)$ annimmt. Der so bestimmte Kegelschnitt von (A^2) ist der A_0^2, welcher den zu $f(\mathfrak{g})$ projektivischen Büschel (A_0^2) beschreibt. Dieser ist zu seinem Tangentenbüschel (a), also auch

zum krummen Gebilde $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{P}^2$ projektivisch. Mithin ist auch (a) projektivisch zum Curvenbüschel (C^3).

Lehrsatz 6. *Haben zwei Curven C_1^3, C_2^3 sieben Punkte gemeinschaftlich, so schneiden sie sich noch in zwei Punkten.*

Sind $a, b, c, d, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die sieben Punkte, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ die Gegenpunkte für C_1^3, C_2^3 von $abcd$, so ist

$$\mathfrak{p}_1(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2 A_\mathfrak{b}^2 A_\mathfrak{c}^2),$$
$$\mathfrak{p}_2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2 A_\mathfrak{b}^2 A_\mathfrak{c}^2).$$

Ist $\mathfrak{P}^2$ der Kegelschnitt durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$, so hat dieser mit C_1^3 ausser $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{p}_1$ noch zwei Punkte u, v gemeinschaftlich, daher ist

$$\mathfrak{p}_1(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,u\,v) \barwedge \mathfrak{p}_2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,u\,v),$$

weil $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ auf $\mathfrak{P}^2$ liegen. Da aber u, v Punkte von C_1^3 sind, so ist

$$\mathfrak{p}_1(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,u\,v) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2 A_\mathfrak{b}^2 A_\mathfrak{c}^2 A_u^2 A_v^2),$$

also auch

$$\mathfrak{p}_2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,u\,v) \barwedge (A_\mathfrak{a}^2 A_\mathfrak{b}^2 A_\mathfrak{c}^2 A_u^2 A_v^2),$$

d. h. u, v liegen auch auf C_2^3.

Folgerung. Alle Curven dritter Ordnung, welche durch sieben Punkte gehen, schneiden eine unter ihnen, C_1^3, in den Punktepaaren uv, deren Verbindungsgerade $\overline{uv}$ durch einen festen Punkt p_1 von C_1^3 geht. Denn ist $\mathfrak{p}_1$ der Gegenpunkt von $a\,b\,c\,d$ für C_1^3 und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die drei übrigen Punkte, so schneidet $\mathfrak{P}^2$, durch $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}_1$ gehend, die C_1^3 noch in u, v, und der dritte Schnittpunkt p_1 von $\overline{uv}$ mit C_1^3 ist der Gegenpunkt von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}_1$ für C_1^3. Da u, v auch auf C_2^3 liegen und mit dieser sich ändern, während C_1^3, also auch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{p}_1$ festbleiben, so bleibt auch p_1 fest.

§ 3. Sätze über Curven dritter Ordnung.

1. Satz. *Sind a, b, c, d, e, f sechs Schnittpunkte einer C^3 mit einem Kegelschnitte K^2, und schneiden $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ die C^3 noch in α, β, γ, so liegen α, β, γ auf einer Geraden.*

Denn α ist der Gegenpunkt von $c\,d\,e\,f$ für C^3, und da $\overline{cd}$ mit $\overline{ef}$ zusammen ein Kegelschnitt des Büschels durch $(c\,d\,e\,f)$ ist, so müssen seine Schnittpunkte β, γ mit C^3 auf einer Geraden durch α liegen.

Zusatz 1. Sind a, b, c die Schnittpunkte einer Geraden G mit C^3, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$, so liegen die Schnittpunkte α, β, γ von $\overline{a\,\mathfrak{a}}$, $\overline{b\,\mathfrak{b}}$, $\overline{c\,\mathfrak{c}}$ mit C^3 auch auf einer Geraden G'.

Zusatz 2. Fallen $a, \mathfrak{a}$ auf C^3 zusammen, so wird $\overline{a\,\mathfrak{a}}$ die Tangente von C^3 in a, und ihr Schnittpunkt a' mit C^3 heisst *Tangentialpunkt* von a, so dass also, wenn G mit $\mathfrak{G}$ coïncidirt, der specielle Satz gilt: *Liegen a, b, c auf einer Geraden G, so liegen ihre Tangentialpunkte a', b', c' auf einer Geraden G'.*

Fig. 87. **2. Satz.** *Es seien $a\,b$, $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$ irgend drei Paar Punkte der Ebene und α_2 der Schnittpunkt von $\overline{a\,a_1}$ mit $\overline{b\,b_1}$, α_1 der Schnittpunkt von $\overline{a\,a_2}$ und $\overline{b\,b_2}$ und α der Schnittpunkt $\overline{a_1\,b_2}$, $\overline{a_2\,b_1}$, dann gehen alle Curven dritter Ordnung, welche $a\,b\,a_1\,b_1\,a_2\,b_2\,\alpha_1\,\alpha_2$ enthalten, auch durch α.*

Denn sei C^3 irgend eine durch die ersten acht Punkte gehende Curve, so liegt der Gegenpunkt von $(a\,b\,\alpha_1\,\alpha_2)$ auf

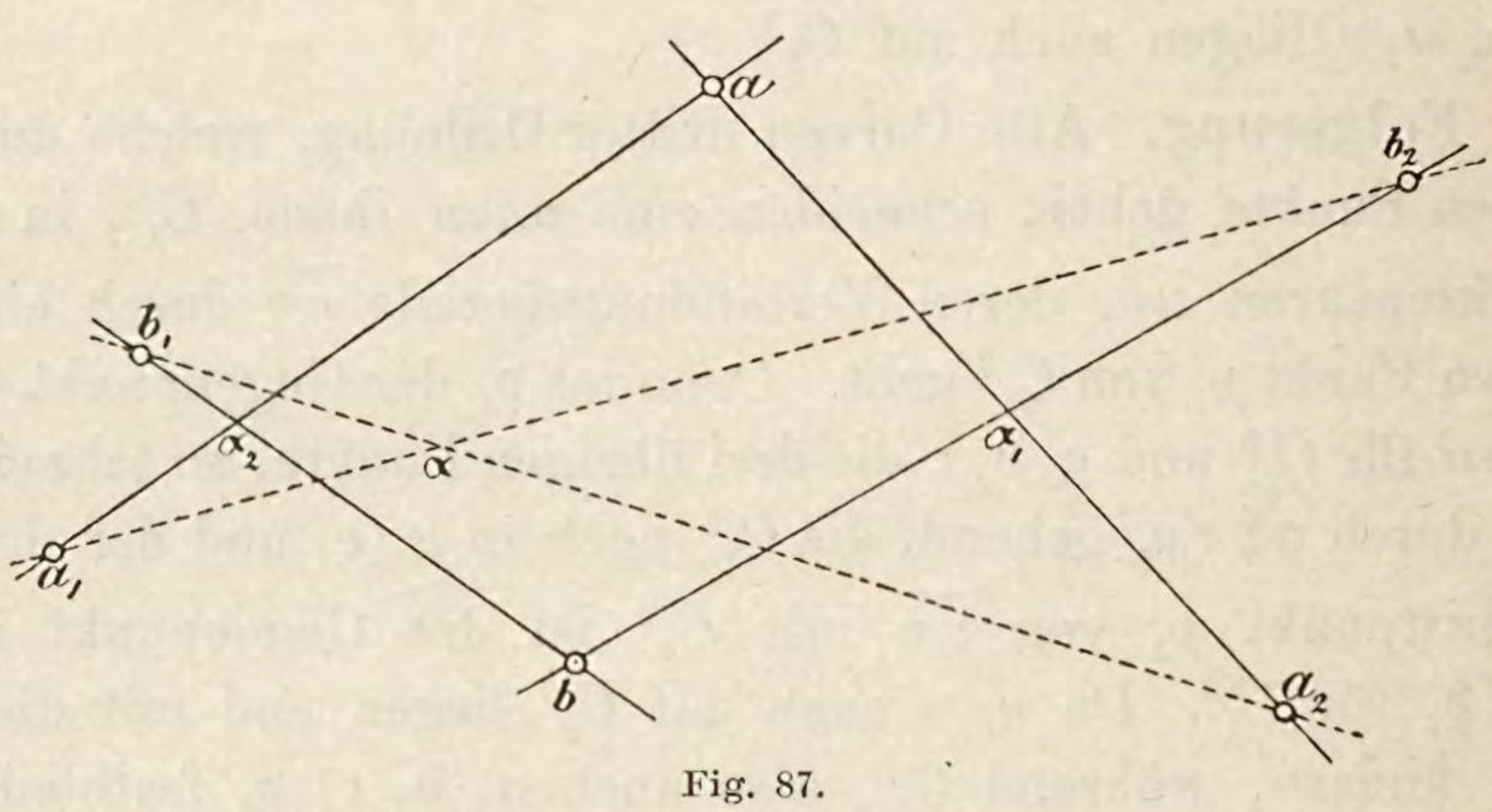


Fig. 87.

$\overline{a_1\,b_2}$, da $\overline{a\,\alpha_2}$ mit $\overline{b\,\alpha_1}$ zusammen ein Kegelschnitt des Büschels durch $(a\,b\,\alpha_1\,\alpha_2)$ ist. Aus ähnlichem Grunde liegt aber der Gegenpunkt auf $\overline{a_2\,b_1}$, es ist also der Punkt α.

Fig. 88. **3. Satz.** *Sind a, b, c, d vier Punkte einer C^3 und geht dieselbe auch durch β, den Schnittpunkt von $\overline{a\,b}$ und $\overline{c\,d}$, sowie γ, den Schnittpunkt von $\overline{a\,c}$ und $\overline{b\,d}$, so haben a und d denselben Tangentialpunkt t.*

Denn sei t der Gegenpunkt von $(b\,c\,\beta\,\gamma)$ für C^3, so ist $\overline{c\,\gamma}$ mit $\overline{b\,\beta}$, ebenso $\overline{c\,\beta}$ mit $\overline{b\,\gamma}$ je ein Kegelschnitt des Büschels

durch $(bc\beta\gamma)$, also muss die Tangente der C^3 von a und von d durch t gehen, da a resp. b zusammenfallende Schnittpunkte der obigen Kegelschnitte mit C^3 sind.

Aus demselben Grunde haben auch c und b denselben Tangentialpunkt u.

Solche Punkte, welche denselben Tangentialpunkt haben, wollen wir *conjugirte Punkte der* C^3 nennen.

Zusatz 1. *Geht die* C^3 *noch durch* α, *den Schnittpunkt von* $\overline{ad}$ *und* $\overline{bc}$, *so haben* $abcd$ *denselben Tangentialpunkt* t, *und bilden ein Quadrupel von* C^3.

Denn auch c, d sind dann conjugirte Punkte von C^3, also muss u mit t coïncidiren.

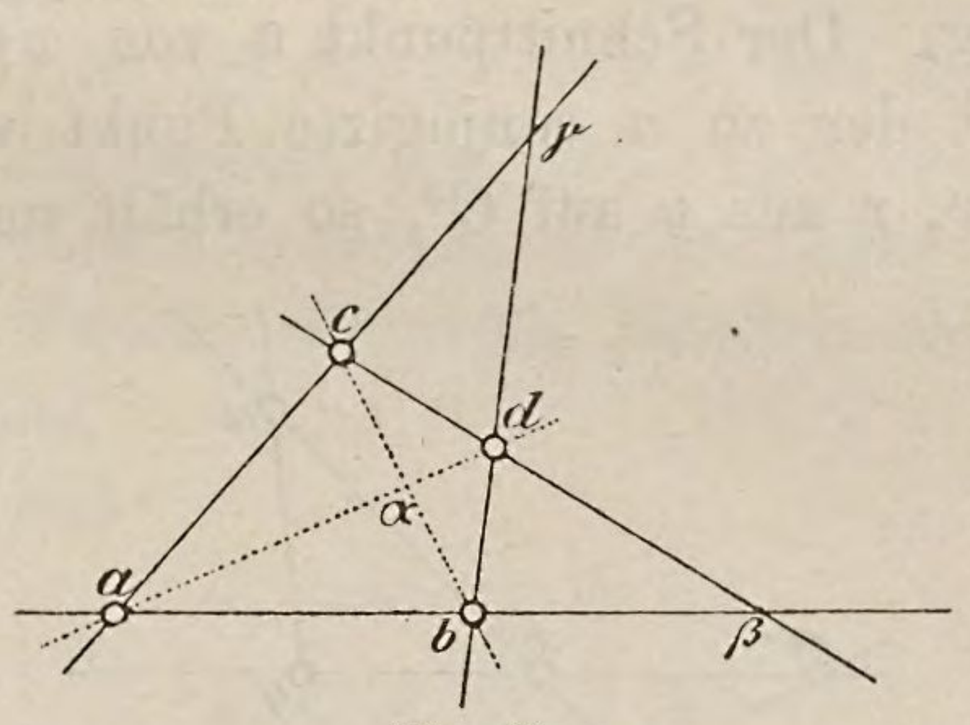


Fig. 88.

Zusatz 2. Die Punkte α, β, γ, t bilden in diesem Falle wieder ein Quadrupel, denn durch a, b, c, d, t geht die conische Polare C_t^2, welche C^3 in t berührt. Ist t' der Tangentialpunkt von t, so ist er Gegenpunkt von $(abcd)$, also gehen auch die Tangenten von α, β, γ durch t'.

4. Satz. *Werden zwei conjugirte Punkte* x, $\mathfrak{x}$ *von* C^3 *aus einem beliebigen Punkte* a *von* C^3 *auf die* C^3 *projicirt, so erhält man wieder zwei conjugirte Punkte* $\mathfrak{y}$, y.

Denn ist a' der Tangentialpunkt von a, und x' der von x und $\mathfrak{x}$, so schneidet $a'x'$ in dem Punkte y', der Tangentialpunkt von $\mathfrak{y}$ ist, weil $xa\mathfrak{y}$ auf einer Geraden liegen (Zusatz 2 zum 1. Satz). Aus demselben Grunde ist aber y' auch Tangentialpunkt von y, da $\mathfrak{x}ay$ auf einer Geraden liegen. Durchläuft a die C^3, so beschreiben $y\mathfrak{y}$ ein *System* conjugirter Punkte von C^3. Zu jedem Punkte y gehört ein einziger bestimmter Punkt $\mathfrak{y}$.

Das Paar $y\,\mathfrak{y}$ heisst mittels des Punktes a aus $x\,\mathfrak{x}$ abgeleitet. Dasselbe kann aus irgend einem anderen Paare $z\,\mathfrak{z}$ auch abgeleitet werden, wenn $z\,\mathfrak{z}$ aus $x\,\mathfrak{x}$ abgeleitet wurde. Denn wurde $z\,\mathfrak{z}$ aus $x\,\mathfrak{x}$ durch b abgeleitet, so geht C^3 durch $x\,\mathfrak{x}$, $y\,\mathfrak{y}$, $z\,\mathfrak{z}$, a, b also auch durch den Schnittpunkt c von $\overline{x\,\mathfrak{z}}$ mit $\overline{z\,\mathfrak{x}}$ nach dem 2. Satze; d. h. $z\,\mathfrak{z}$ ist mittels c aus $x\,\mathfrak{x}$ abgeleitet.

In dem Quadrupel $a\,b\,c\,d$ sind $a\,b$, $a\,c$, $a\,d$ drei Paar conjugirter Punkte von C^3, und jedes Paar gibt Anlass zu einem *System* solcher Punkte. Auf C^3 existiren daher *drei*, und wie aus dem Zusatze 2 des 3. Satzes folgt, *nur* drei Systeme conjugirter Punkte.

Fig. 89. **Folgerung.** Der Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ von $\overline{x\,y}$ mit $\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}$ liegt auf C^3 und ist der zu a conjugirte Punkt von C^3. Denn projicirt man x, $\mathfrak{x}$ aus y auf C^3, so erhält man in $\mathfrak{a}\,a$ zwei

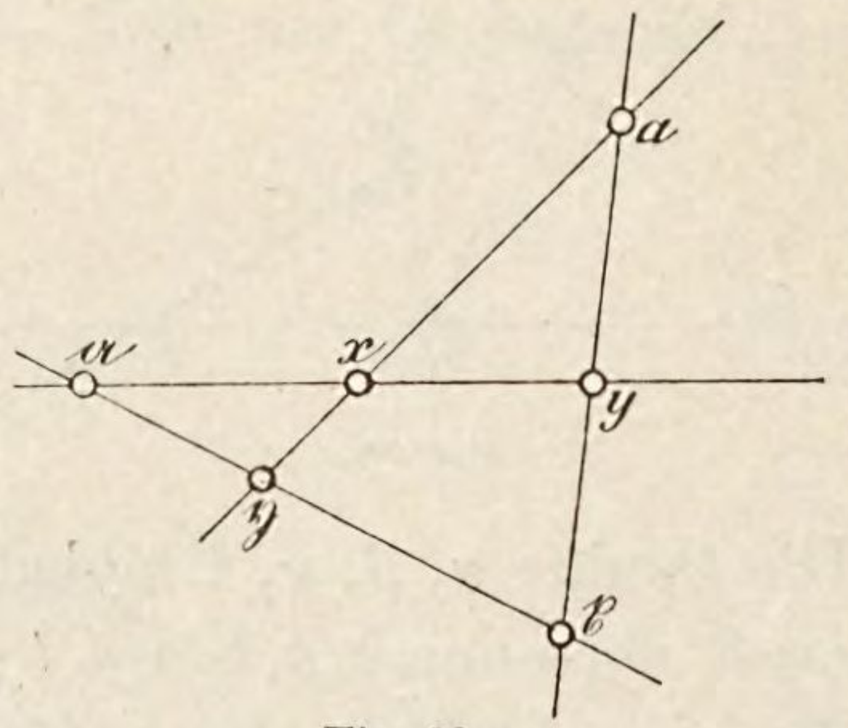


Fig. 89.

conjugirte Punkte, die man auch durch Projektion von $x\,\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{y}$ auf C^3 erhalten muss.

Fig. 90. **5. Satz.** *Projicirt man sämmtliche Paare conjugirter Punkte $x\,\mathfrak{x}$ von C^3 aus einem Punkte a der C^3, so erhält man in a eine Strahleninvolution.*

Denn schneidet $a\,x$, $a\,\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{y}$ und y, so sind y, $\mathfrak{y}$ wieder ein Paar conjugirter Punkte und der Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ von $\overline{x\,y}$ mit $\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}$ ist ein fester Punkt von C^3. Ist nun ξ und η auf $\overline{a\,x}$ resp. $\overline{a\,\mathfrak{x}}$ so bestimmt, dass $[a\,x\,\xi\,\mathfrak{y}]$ und $[a\,y\,\eta\,\mathfrak{x}]$ je ein harmonisches Quadrupel ist, so geht $\overline{\xi\,\eta}$ durch $\mathfrak{a}$. Beschreibt $\overline{a\,x}$ den Strahlenbüschel (a), so durchläuft ξ die conische Polare C_a^2 des Punktes a, also beschreiben $\xi\,\eta$ auf C^2 eine

Involution, die aus a durch eine Strahleninvolution projicirt wird.

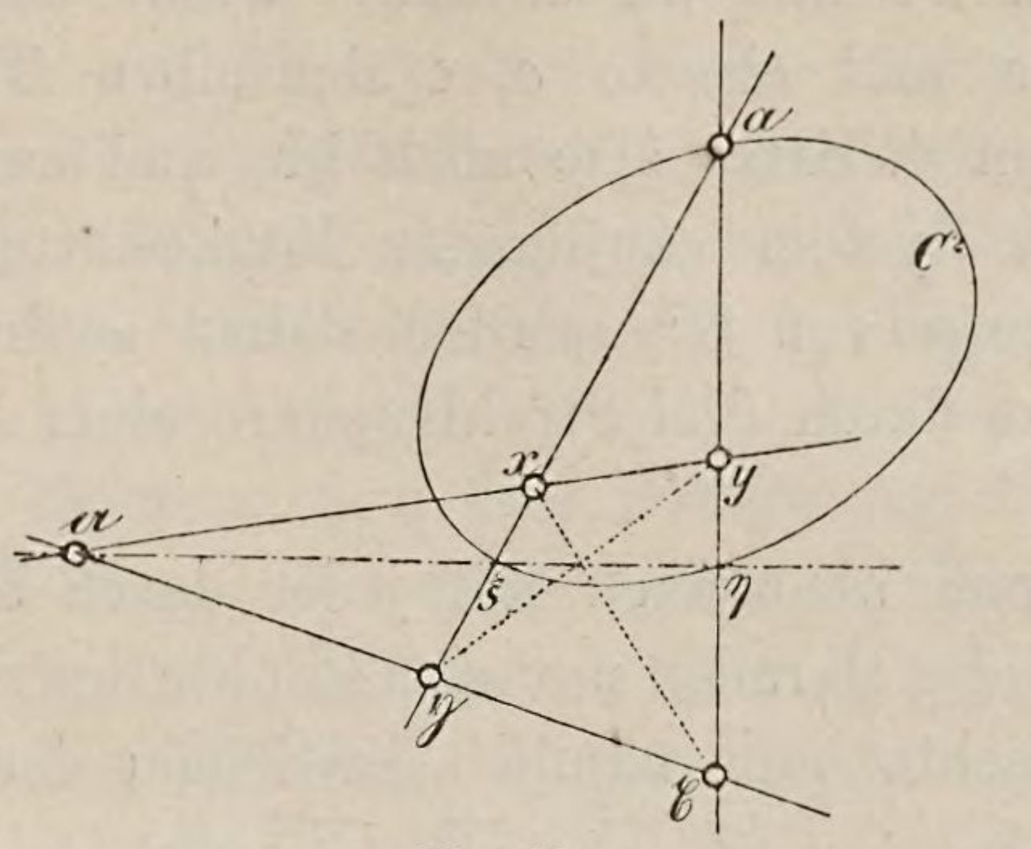


Fig. 90.

6. Satz. *Der Ort des Punktes p, aus dem sich drei beliebig gegebene Punktepaare* $a\,\mathfrak{a}$, $b\,\mathfrak{b}$, $c\,\mathfrak{c}$ *durch drei Strahlenpaare einer Involution projiciren, ist eine Curve dritter Ordnung durch die sechs Punkte, für welche dieselben drei Paare conjugirter Punkte sind.* Fig. 91.

Schneiden sich

$b\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\,c$ in α,

$\overline{a\,\mathfrak{c}}$ und $\overline{\mathfrak{a}\,c}$ in β,

$\overline{a\,\mathfrak{b}}$ und $\overline{\mathfrak{a}\,b}$ in γ,

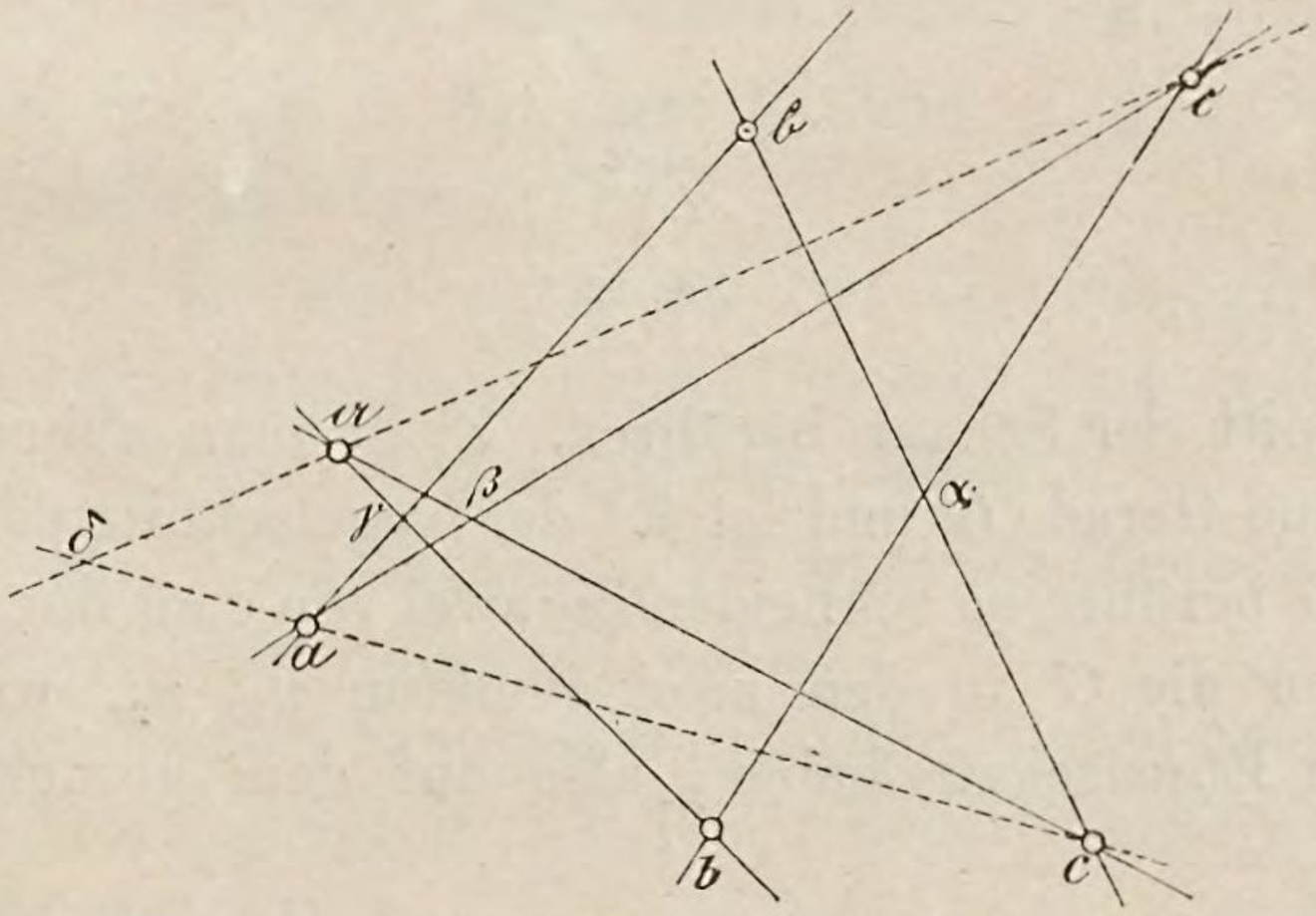


Fig. 91.

so werden alle Curven dritter Ordnung, welche durch a, $\mathfrak{a}$, b, $\mathfrak{b}$, c, $\mathfrak{c}$, β, γ gehen, nach dem 2. Satze auch α enthalten

und C^3 sei diejenige unter ihnen, welche auch den Schnittpunkt δ von $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}$ und $\overline{a\,c}$ enthält. Dann haben nach dem 3. Satze a, $\mathfrak{a}$ und ebenso c, $\mathfrak{c}$ denselben Tangentialpunkt und nach dem 4. Satze also auch $b\,\mathfrak{b}$, und zwar gehören $a\,\mathfrak{a}$, $b\,\mathfrak{b}$, $c\,\mathfrak{c}$ *einem* System conjugirter Punkte von C^3 an. Aus jedem Punkte p von C^3 werden daher nach dem 5. Satze die drei Paare durch drei Strahlenpaare einer Involution projicirt.

Es können aber auch auf jeder durch einen der sechs Punkte gehenden Geraden nur zwei Punkte des verlangten Ortes liegen. Betrachtet man nämlich die Schaar der Kegelschnitte, welche die Geraden $\overline{a\,b}$, $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{a}\,b}$, $\overline{a\,\mathfrak{b}}$ berühren, so bilden die Tangenten, welche man von einem Punkte x an die Kegelschnitte der Schaar zieht, eine Involution, deren zwei Paare $\overline{x\,a}$, $\overline{x\,\mathfrak{a}}$ und $\overline{x\,b}$, $\overline{x\,\mathfrak{b}}$ sind (Folgerung 1 zu Lehrsatz 4 des § 2, Kap. VI, Seite 141). Sollen nun $\overline{x\,c}$ und $\overline{x\,\mathfrak{c}}$ auch ein Paar dieser Involution sein, so müssen diese Geraden *denselben*

Fig. 92.

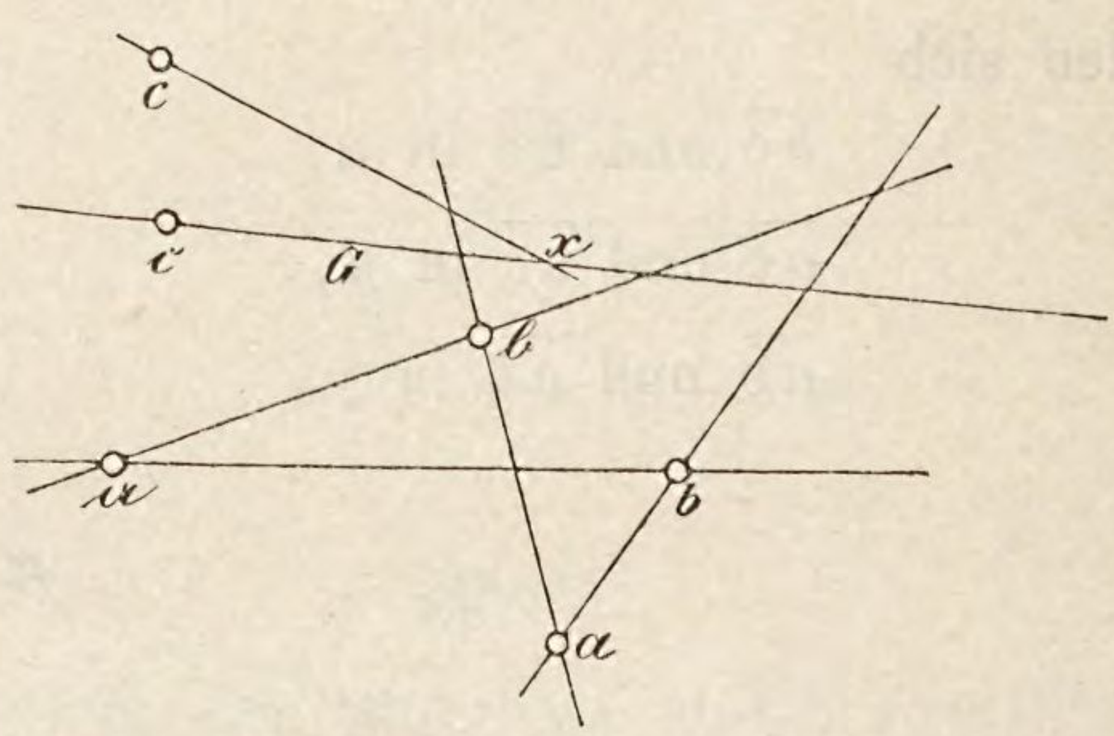


Fig. 92.

Kegelschnitt der Schaar berühren. Zieht man daher durch $\mathfrak{c}$ irgend eine Gerade G und ist $\mathfrak{K}^2$ der Kegelschnitt der Schaar, welcher G berührt, so schneiden die zwei von c an ihn gehenden Tangenten die G in den zwei Punkten p_1, p_2, welche die verlangte Eigenschaft haben, also auf dem gesuchten Orte liegen.

Dieser Ort ist mithin *nur* die Curve dritter Ordnung, die oben angegeben wurde.

7. Satz. *Die sämmtlichen Punkte x, $\mathfrak{x}$, welche in Bezug auf die Kegelschnitte eines Netzes conjugirte Pole sind, bilden*

ein System conjugirter Punkte einer bestimmten Curve dritter Ordnung, der Kerncurve des Netzes.

Denn sind $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$ drei solche Paare, wodurch das Netz, also auch alle übrigen Paare $x\mathfrak{x}$ bestimmt sind (Kap. VII, § 2), so folgt aus dem eben bewiesenen 6. Satze in Verbindung mit dem Lehrsatze 5 des § 2, Kap. VII der vorstehende Satz.

Zusatz. Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ drei Punkte von C^3, welche auf der Geraden $\mathfrak{G}$ liegen, und x, y, z seien die ihnen conjugirten, dann geht $\overline{yz}$ durch $\mathfrak{x}$, $\overline{xz}$ durch $\mathfrak{y}$ und $\overline{xy}$ durch $\mathfrak{z}$, wie ohne Weiteres aus dem Lehrsatze 3, § 7, Kap. III folgt.

Sei nun (A^2) ein Büschel des Netzes und K^2 derjenige Kegelschnitt dieses Büschels, für den $\overline{yz}$ Polare von x ist. $(\mathfrak{A}^2)$ sei ein anderer Büschel, dessen Basispunkte nicht auf K^2 liegen, dann ist in $(\mathfrak{A}^2)$ ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ vorhanden, für den x Pol von $\overline{yz}$ ist. Für den Büschel $(K^2\mathfrak{K}^2)$ ist xyz das allen Kegelschnitten desselben conjugirte Poldreieck. Denn die Polare von y muss für K^2 sowol als $\mathfrak{K}^2$ durch x und $\mathfrak{y}$ gehen, ist also die Gerade $\overline{x\mathfrak{y}} = \overline{xz}$. Ebenso ist $\overline{x\mathfrak{z}} = \overline{xy}$ Polare von z für K^2 und $\mathfrak{K}^2$.

Ist umgekehrt xyz ein Poldreieck eines Büschels im Netze, und A^2 ein *nicht* in diesem Büschel liegender Kegelschnitt, so schneiden die Polaren von x, y, z für A^2 die Seiten $\overline{zy}$, $\overline{xz}$, $\overline{yx}$ in den drei Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, welche auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ liegen.

Die C^3 ist also auch der Ort der conjugirten Tripel x, y, z der im Netze enthaltenen Büschel. Aus diesem Grunde heisst die C^3 auch *Tripelcurve des Netzes.*

8. Satz. *Eine bestimmte C^3 kann als Kerncurve dreier verschiedener Netze aufgefasst werden.*

Jedes der drei Systeme conjugirter Punkte einer C^3 kann als das System conjugirter Pole der Kegelschnitte eines Netzes aufgefasst werden.

§ 4. Das Netz conischer Polaren einer Curve dritter Ordnung*).

Sei H^3 die Tripelcurve eines Kegelschnittnetzes, welche die Gerade G in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ treffen möge, so bilden die diesen Punkten im Netze conjugirten Pole x, y, z ein Poldreieck eines bestimmten Büschels (K^2) des Netzes. q, q', q'', q''' seien die Basispunkte von (K^2), welche wir als Quadrupel $[q]$ bezeichnen; dann soll die Gerade G jedem der Punkte q als auch dem Quadrupel $[q]$ *associirt* heissen. Jedem Punkte q der Ebene ist hiernach eine bestimmte Gerade associirt.

Lehrsatz 1. *Durchläuft das Quadrupel* $[q]$ *einen Netzkegelschnitt* P^2, *so beschreibt die ihm associirte Gerade* G *einen Strahlenbüschel* (p). Der Scheitel p desselben heisse dem Netzkegelschnitte P^2 *zugeordnet.*

Die Quadrupel $[q_i]$ auf P^2 sollen von den Kegelschnitten (K_i^2) eines Büschels ausgeschnitten werden, dessen Basisquadrupel $[q_0]$ nicht auf P^2 liegt. Ist $x_0 y_0 z_0$ das zu $[q_0]$ und $x_i y_i z_i$ das zu $[q_i]$ gehörige Tripel, so beschreiben die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_i^2$, welche durch $x_0, y_0, z_0, x_i, y_i, z_i$ gehen (vergl. den Lehrsatz 2, Seite 95) einen Büschel $(\mathfrak{K}_i^2)$. Denn schneiden einander $\mathfrak{K}_1^2, \mathfrak{K}_2^2$ ausser in $x_0 y_0 z_0$ noch in π, so sei $\mathfrak{P}$ die Polare von π für P^2. Sind dann $\pi_1'\pi_1''$ und $\pi_2'\pi_2''$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_1^2$ resp. $\mathfrak{K}_2^2$ mit $\mathfrak{P}$, so ist sowol $\pi\pi_1'\pi_1''$ als auch $\pi\pi_2'\pi_2''$ ein Poldreieck von P^2 (vergl. Zusatz auf Seite 96), also sind $\pi_1'\pi_1''$ und $\pi_2'\pi_2''$ zwei Paare der Involution $\{\mathfrak{P}\}$, dieselbe wird von dem Büschel $(\mathfrak{K}_1^2\mathfrak{K}_2^2)$ auf $\mathfrak{P}$ ausgeschnitten. Ist $\mathfrak{x}_0$ der Schnittpunkt von $\overline{y_0 z_0}$ mit $\mathfrak{P}$, so ist er Pol von $\overline{x_0\pi}$ für P^2, da $\overline{x_0\pi}$ und $\overline{y_0 z_0}$ auch ein Paar von $\{\mathfrak{P}\}$ enthalten. (Vergl. Seite 133.) Mithin sind $x_0, \mathfrak{x}_0$ conjugirt im Netze. Sind ebenso $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0$ die Schnittpunkte von $\overline{z_0 x_0}$, $\overline{x_0 y_0}$ mit $\mathfrak{P}$, so sind auch $y_0, \mathfrak{y}_0$ und $z_0, \mathfrak{z}_0$ im Netze conjugirte Pole d. h. die Gerade $\mathfrak{P}$ ist dem Quadrupel $[q_0]$ associirt. Es bleibt daher $\mathfrak{P}$ für alle Paare $\mathfrak{K}_h^2\mathfrak{K}_i^2$ fest, diese müssen also alle durch π, den Pol von $\mathfrak{P}$ für P^2 gehen.

---

*) Cfr. Küpper: Ueber geometrische Netze, Abhandlung der königl. böhm. Gesellschaft VII. Folge, 3. Band, 1889.

Der Büschel (K^2) bestimmt eine Steiner'sche Verwandtschaft, in welcher dem Punkte π der Punkt p entsprechen soll, dann gehen die den $\mathfrak{K}_i^2$ entsprechenden G_i durch p und sind, wie man leicht erkennt, den Quadrupeln $[q_i]$ associirt.

Anmerkung. Ist P^2 ein zerfallender Kegelschnitt $\mathfrak{S}S$, so ist der Schnittpunkt s der Chordalen $S, \mathfrak{S}$ in allen Tripeln enthalten, die den $[q_i]$ zugehören, daher gehen alle G_i durch den Punkt $\mathfrak{s}$, der s im Netze conjugirt ist.

Folgerung 1. Jedem Punkte p ist ein bestimmter Netzkegelschnitt P^2 zugeordnet.

2. Der Geraden $\overline{p_1 p_2}$ ist das Quadrupel associirt, in dem sich die den Punkten p_1, p_2 zugeordneten Kegelschnitte P_1^2, P_2^2 schneiden.

Lehrsatz 2. *Sind K^2, L^2 zwei Kegelschnitte des Netzes, k, l die ihnen zugeordneten Punkte, so ist die Polare von k für L^2 identisch mit der Polare von l für K^2.*

Es sei M^2 ein dritter nicht im Büschel $(K^2 L^2)$ enthaltener Kegelschnitt und m der ihm zugeordnete Punkt.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sind } k, \varkappa \text{ conjugirt im Büschel } (L^2 M^2) \\ \quad l, \lambda \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (M^2 K^2) \\ \quad m, \mu \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (K^2 L^2) \end{array}\right\} \text{a)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{so ist die Gerade } \overline{lm} = K \text{ Polare von } \varkappa \text{ für } K^2 \\ \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \overline{mk} = L \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \lambda \quad \text{„} \quad L^2 \\ \text{und} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \overline{kl} = M \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mu \quad \text{„} \quad M^2 \end{array}\right\} \text{b)}$$

da K dem Basisquadrupel von $(L^2 M^2)$ associirt ist u. s. w.

Daher muss die Polare von k für L^2 durch $\varkappa$ gehen zu Folge a) und durch λ zu Folge b), ist mithin die Gerade $\overline{\varkappa\lambda}$. Ebenso muss aber die Polare von l für K^2 durch λ und $\varkappa$ gehen, ist also ebenfalls die Gerade $\overline{\lambda\varkappa}$.

Folgerung 1. Ist der Punkt k, welcher dem Netzkegelschnitte K^2 zugeordnet ist, bekannt, so findet man den einem beliebigen Netzkegelschnitte X^2 zugeordneten Punkt x, indem man von k die Polare X für X^2 bestimmt, wodurch dann x als Pol von X für K^2 sich ergiebt.

2. Beschreibt K^2 einen Büschel (K^2), so durchläuft der zugeordnete Punkt k ein zu (K^2) projektivisches gerades Ge-

bilde auf der Geraden G, welche dem Basisquadrupel von (K^2) associirt ist.

Dass k auf G liegen muss, ist ohne Weiteres klar. Sei K_0^2 ein fester Kegelschnitt des Büschels, k_0 der ihm zugeordnete Punkt und $\varkappa_0$ der k_0 im Büschel (K^2) conjugirte Pol. Dann beschreibt die Polare K von k_0 für den variablen Kegelschnitt K^2 den zu (K^2) projektivischen Strahlenbüschel $(\varkappa_0)$ und die Pole k von K für K_0^2 beschreiben das zu $(\varkappa_0)$, also auch (K^2), projektivische gerade Gebilde auf G.

Anmerkung. Da die Pole der Strahlen K von $(\varkappa_0)$ für K_0^2 auf G liegen, so ist G Polare von $\varkappa_0$ für K_0^2, wir haben daher auch folgende Construction des dem K_0^2 von (K^2) zugeordneten Punktes k_0:

Ist K_0^2 ein Kegelschnitt des Büschels (K^2), dessen Basispunkten die Gerade G associirt ist, so bestimme man den Pol $\varkappa_0$ von G für K_0^2, dann ist der zu $\varkappa_0$ im Büschel (K^2) conjugirte Punkt k_0 dem Kegelschnitte K_0^2 zugeordnet.

Lehrsatz 3. *Die dem Punkte q associirte Gerade G ist Polare von q für den Kegelschnitt Q^2, der q zugeordnet ist.*

Sei (K^2) der durch q gehende Büschel, dann liegen alle k auf G. Die Polare von k für Q^2 ist identisch mit der Polare von q für K^2, ist also die Tangente von K^2 in q. Da mithin k, q für Q^2 conjugirt sind, so durchläuft k die Polare von q für Q^2.

Folgerung. Geht der Netzkegelschnitt A^2 durch den zugeordneten Punkt a, so berührt A^2 die a associirte Gerade A; und umgekehrt, geht die a associirte Gerade A durch a, so berührt der a zugeordnete Kegelschnitt A^2 die A in a.

Lehrsatz 4. *Auf jeder Geraden G liegen drei Punkte a, b, c, durch welche die ihnen zugeordneten Kegelschnitte A^2, B^2, C^2 gehen. Von diesen Punkten ist stets einer reell, die zwei anderen können conjungirt imaginär sein. Schneiden A^2, B^2, C^2 die G in aa', bb', cc', so sind $[aba'c]$, $[bab'c]$ und $[c\,a\,c'\,b]$ harmonische Quadrupel.*

Durch das G associirte Quadrupel gehen die Kegelschnitte K^2 des Büschels (K^2), welche G in der Involution $\{G\}$ schneiden, die projektivisch ist zu dem geraden Gebilde $|G|$, das k auf G beschreibt. Den Punkten k_0, k mögen

die Paare $m_0 m_0'$ resp. $m m'$ entsprechen, die Schnittpunkte von K_0^2, K^2 mit G sind. Zufolge Lehrsatz 2 wird der Punkt x, welcher mm' von k_0 harmonisch trennt, auch $m_0 m_0'$ von k harmonisch trennen.

Wir denken uns nun $\{G\}$ und $|G|$ aus einem Punkte des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ auf diesen projicirt und behalten dieselbe Bezeichnung der Punkte bei. Ist dann μ_0 der Pol von $m_0 m_0'$ und μ der von mm' für $\mathfrak{K}$; so schneiden einander $\mu_0 k$ und $\overline{\mu k_0}$ auf $\mathfrak{K}$ in dem Punkte x. Da μ die Polare J der Fig. 93.

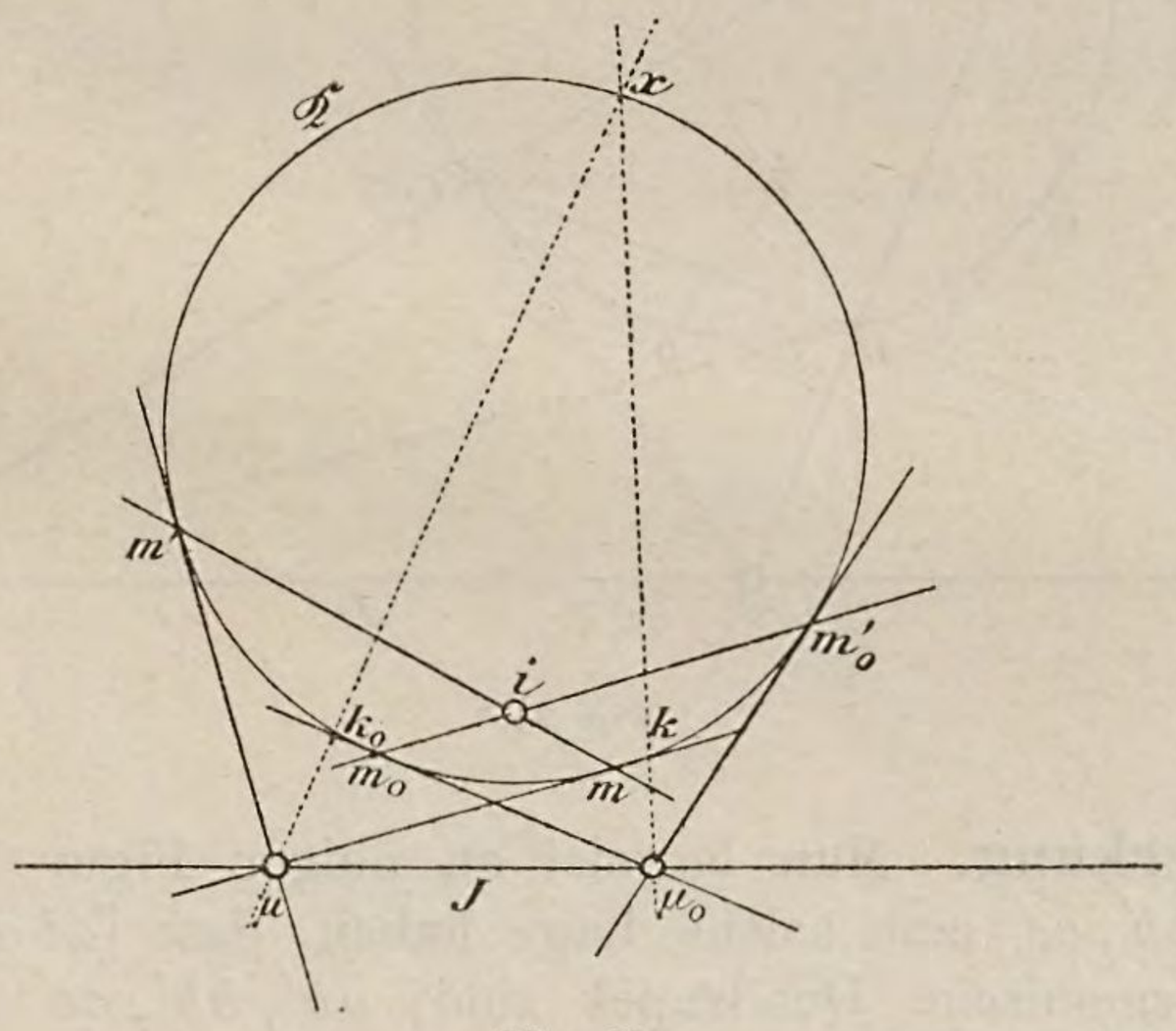


Fig. 93.

Involution auf $\mathfrak{K}$ beschreibt, während k_0 und μ_0 fest bleiben, so beschreibt k ein zur Involution projektivisches Gebilde auf $\mathfrak{K}$, das mit der Involution drei Doppelpunkte gemeinschaftlich hat, die auf G projicirt die Punkte a, b, c geben.

Ist 1 der Pol von $\overline{aa'}$ und 2 der Pol von $\overline{bb'}$ für $\mathfrak{K}$, so Fig. 94. muss $\overline{1b}$ sich mit $\overline{2a}$ in einem Punkte x von $\mathfrak{K}$ schneiden, dann ist x der dritte Doppelpunkt c. Denn schneidet die Tangente von $\mathfrak{K}$ in x die Gerade $\overline{ab}$ in 3, so liegen 1, 2, 3 auf einer Geraden J, denn das Dreieck abx ist $\mathfrak{K}$ eingeschrieben und 1, 2, 3 sind die Schnittpunkte der Tangenten von $\mathfrak{K}$ in a, b, x mit den gegenüberliegenden Seiten. (Anmerkung zum Pascalschen Satze, Seite 53.) Es ist mithin $J = \overline{123}$ die Polare der Involution, die aa', bb' bestimmen. Ist x' der zu x in der Involution conjugirte Punkt, so ist 3 Pol von $\overline{xx'}$ für $\mathfrak{K}$. Da

sich nun $\overline{3a}$ und $\overline{1x}$ in b schneiden, so entspricht x dem Paare xx', oder x ist der dritte Doppelpunkt c.

Die Figur zeigt nun sogleich, dass $[aba'c]$, $[bab'c]$ und $[cbc'a]$ harmonische Quadrupel sind.

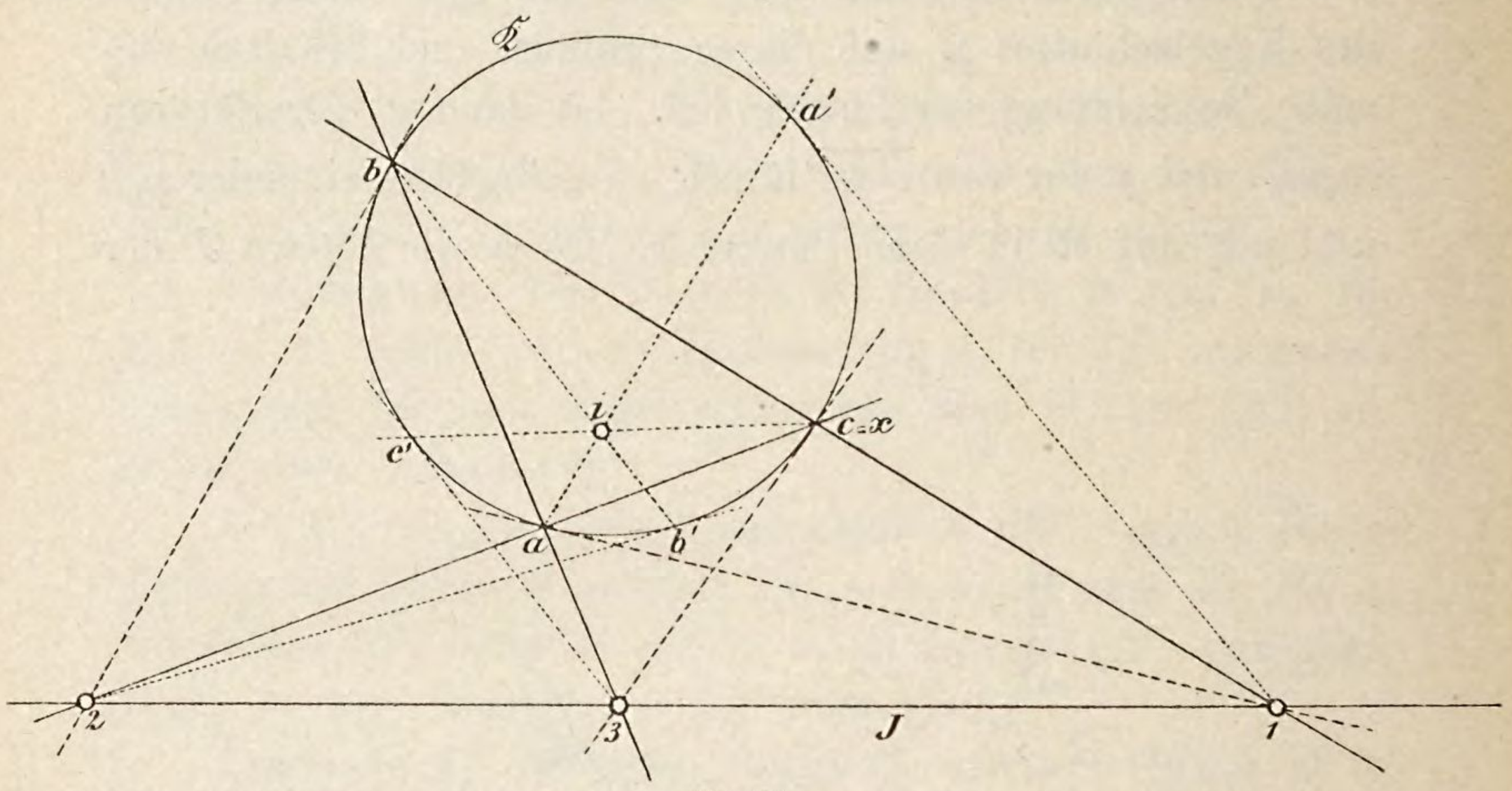


Fig. 94.

Anmerkung. Man beweist an obiger Figur leicht, dass wenn aa', bb', cc' eine solche Lage haben, dass $[aba'c]$, $[bcb'a]$, $[cac'b]$ harmonische Quadrupel sind, aa', bb', cc' drei Paare *einer* Involution werden.

Auf den Geraden A, welche durch einen ihnen associirten Punkt a gehen, liegt nur noch ein Punkt b, durch den sein zugeordneter Kegelschnitt B^2 geht. Da der Büschel (K^2) durch a geht, so schneidet er A nur in einer Punktreihe, die zu der von k durchlaufenen projektivisch ist. Ein Deckpunkt beider ist a, indem A^2 die A in a berührt. Es tritt mithin noch ein zweiter b auf.

Lehrsatz 5. *Die conischen Polaren A^2 der Punkte a einer Curve dritter Ordnung C^3 liegen in einem Kegelschnittnetze. Jedem Punkte von C^3 ist seine conische Polare zugeordnet.*

Wir zeigen vorerst, dass die drei Polaren A^2, B^2, C^2 der drei Schnittpunkte a, b, c einer willkürlichen Geraden G mit C^3 in einem Büschel liegen. Schneiden die drei Polaren G in aa', bb', cc', so stellen (Lehrsatz 6, Seite 186) $[aba'c]$, $[bcb'a]$ und $[cac'b]$ harmonische Quadrupel vor, also sind

der obigen Anmerkung zufolge aa', bb', cc' drei Paare einer Involution $\{G\}$, die vom Büschel (A^2B^2) etwa auf G ausgeschnitten wird. Daher geht die Curve C_1^2 des Büschels (A^2B^2), welche c enthält, auch durch c'.

Sind A, B, C die Tangenten von C^3 in a, b, c, also auch Fig. 95.
Tangenten von A^2, B^2, C^2 in diesen Punkten, so geht zu Folge der Beziehung von A^2 zu C^3 die Tangente von A^2 in a' durch den Schnittpunkt a_1 von B, C. Ebenso ist auch, wenn A, B sich in c_1 und A, C in b_1 schneiden, $\overline{c_1c'}$ Tangente von C^2 und $\overline{b_1b'}$ Tangente von B^2. Der Schnittpunkt u von A

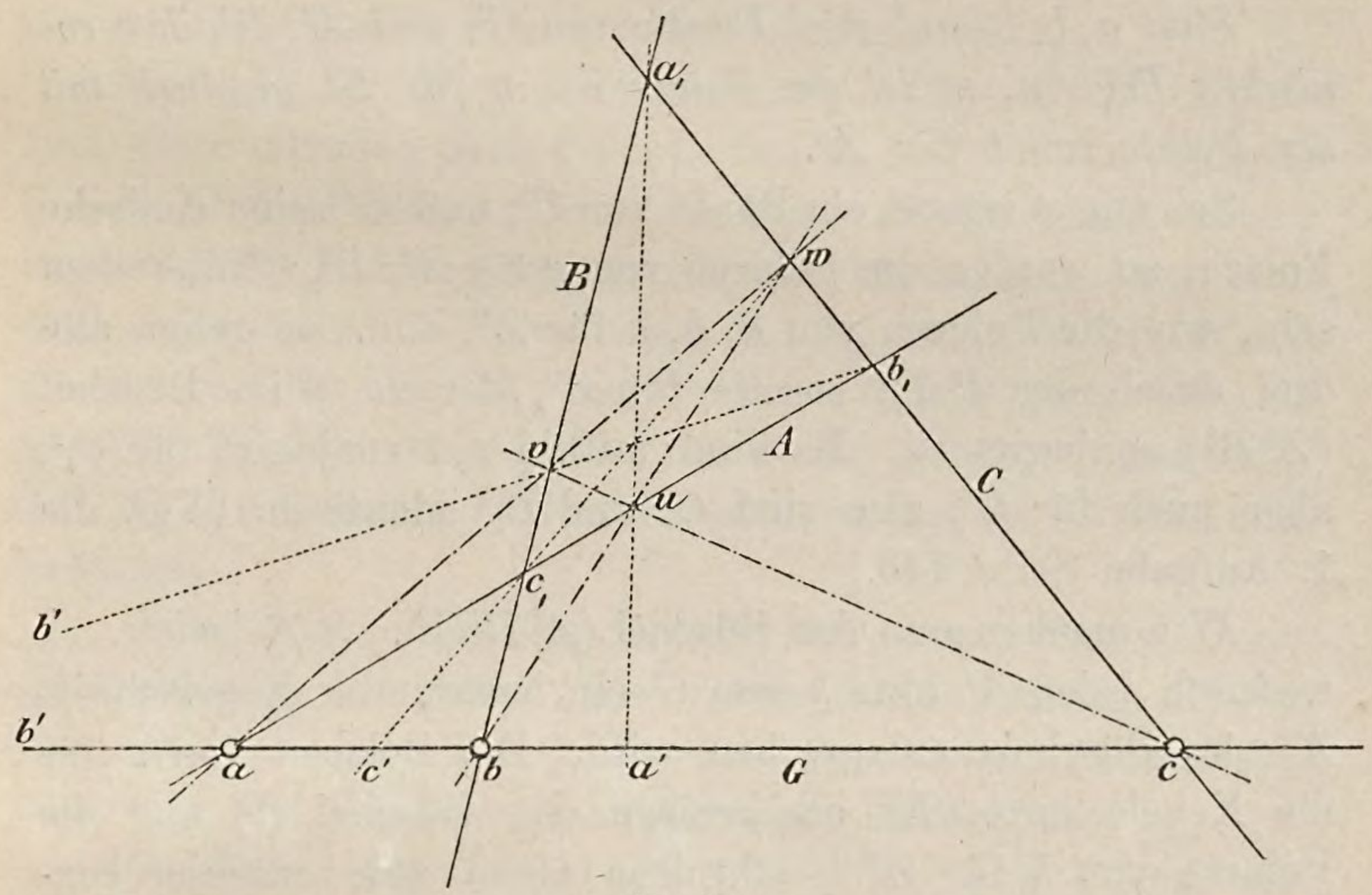


Fig. 95.

mit $\overline{a_1a'}$ ist also Pol von G für A^2, der Schnittpunkt v von $\overline{b_1b'}$ mit B der Pol von G für B^2 und der Schnittpunkt w von $\overline{c_1c'}$ mit C der Pol von G für C^2. Da nun $[ac_1ub_1]$ und $[bc_1va_1]$ harmonische Quadrupel sind, so geht $\overline{uv}$ durch c (Folgerung 2 zu Lehrsatz 1, Seite 5). Ebenso geht $\overline{vw}$ durch a und $\overline{wu}$ durch b. Die Gerade $\overline{cv}$ ist Polare von a für B^2, weil c von a durch b, b' harmonisch getrennt und v der Pol von G für B^2 ist; da sie durch u geht, so sind a, u conjugirt im Büschel (A^2B^2) und ebenso sind b, v im Büschel (A^2B^2) conjugirt. Es ist ferner $\overline{bu}$ Polare von c für A^2 und $\overline{av}$

Polare von c für B^2, also ist der Schnittpunkt w beider Polaren conjugirt zu c im Büschel (A^2B^2), mithin sind w, c auch conjugirt für C_1^2. Die Polare von a für C_1^2 muss durch u gehen, und da b von a durch c, c' harmonisch getrennt ist, ist $\overline{bu}$ diese Polare d. h. a, w sind für C_1^2 auch conjugirt, oder $\overline{ac} = G$ ist Polare von w für C_1^2, ebenso wie für C^2.

Um nun die Identität von C^2 und C_1^2 zu erweisen, bemerken wir vorerst Folgendes. Wir sahen, dass $\overline{cv}$ Polare von a für B^2 ist; da ferner $\overline{cu} = \overline{cv}$ Polare von b für A^2 ist, so erhalten wir den Satz:

Sind a, b irgend zwei Punkte von C^3 und A^2, B^2 ihre conischen Polaren, so ist die Polare von a für B^2 identisch mit der Polare von b für A^2.

Sei nun z irgend ein Punkt von C^3, und Z^2 seine conische Polare, so werden die Polaren von z für A^2, B^2, C^2 dieselben sein, wie die Polaren von a, b, c für Z^2, d. h. sie gehen alle drei durch den Pol t von G für Z^2, der zu z im Büschel (A^2B^2) conjugirt ist. Es sind mithin z, t conjugirt für C_1^2, aber auch für C^2, also sind C^2 und C_1^2 identisch. (Vgl. die 1. Aufgabe Seite 143.)

Wir machen nun den Büschel $(A^2B^2C^2 \ldots) \barwedge |abc \ldots|$, wodurch jedem Punkte k von G ein bestimmter Kegelschnitt K^2 des Büschels entsprechen wird. Die Polaren von z für die Kegelschnitte K^2 beschreiben den Büschel (t) und die Polaren von k für Z^2 beschreiben einen zum ersteren concentrischen projektivischen Büschel. Da beide conlocalen Büschel aber drei Strahlen gemeinschaftlich haben, die Polaren von z für A^2, B^2, C^2, so sind sie identisch, d. h. die Polare von z für jeden K^2 ist auch Polare von k für Z^2.

Sei nun X^2 die Polare eines beliebigen Punktes x von C^3, so beweisen wir, dass X^2 in dem durch A^2, B^2, Z^2 bestimmten Netze enthalten ist. Zu diesem Zwecke zeigen wir vorerst, dass G in dem durch A^2, B^2, Z^2 bestimmten Kegelschnittnetze dem Basisquadrupel von (A^2B^2) associirt ist, und dass die Punkte k den Kegelschnitten K^2 zugeordnet sind. Denn ist s, s', s'' das dem Büschel (A^2B^2) conjugirte Poldreieck, so ist s der Schnittpunkt eines im Büschel enthaltenen Geradenpaares $\mathfrak{S}S$, wel-

chem der Punkt $\mathfrak{S}$ von G entsprechen möge. Da die Polaren von $\mathfrak{S}$ für A^2, B^2, Z^2 identisch sind mit den Polaren von a, b, z für $\mathfrak{S}S$, diese aber durch s gehen (VI, § 1, Lehrsatz 3, Seite 131), so ist s zu $\mathfrak{S}$ im Netze conjugirt. Da dasselbe von $\mathfrak{S}', \mathfrak{S}''$ gilt, welche Punkte den in s' resp. s'' sich schneidenden Geradenpaaren des Büschels (A^2B^2) entsprechen, so ist G die, dem zu $ss's''$ gehörenden Quadrupel, associirte Gerade. Jedem Punkte k ist dann der Kegelschnitt K^2 zugeordnet, da den Punkten a, b, c die Kegelschnitte A^2, B^2, C^2 zugeordnet sind, nachdem der Pol u von G für A^2 zu a im Büschel (A^2B^2) conjugirt ist (Anmerkung auf Seite 202). z ist der zugeordnete Punkt von Z^2 (Lehrsatz 2).

Sind X_1, X_2, X_3 die Polaren von x für A^2, B^2, Z^2, so sind diese Geraden auch Polaren von a, b, z für die conische Polare X^2 des Punktes x von C^3. Um nun den dem Punkte x zugeordneten Netzkegelschnitt $X_1{}^2$ zu bestimmen, kann man nach Lehrsatz 2 die Polaren X_1, X_2, X_3 von x für A^2, B^2, Z^2 als Polaren für den $X_1{}^2$ den Punkten a, b, z zuweisen. Da nun X_1, X_2, X_3 nicht durch einen Punkt gehen, so muss $X_1{}^2$ mit X^2 identisch sein. Hiermit ist der Lehrsatz 4 vollständig bewiesen.

Definition. *Jeder Kegelschnitt des Netzes, das die conischen Polaren der Punkte einer Curve dritter Ordnung C^3 enthält, heisst conische Polare des ihm zugeordneten Punktes und dieser der Pol des ihm zugeordneten Kegelschnittes.*

Die Polare des Punktes p in Bezug auf seine conische Polare P^2 heisst gerade Polare von p für C^3, p selbst, ein P associirter Punkt, heisst Pol von P für C^3.

Mit Rücksicht auf das Vorangehende ergeben sich nun folgende Sätze:

Ist q ein Punkt der geraden Polare P von p, so geht die conische Polare Q^2 von q durch p (Lehrsatz 3).

Die conischen Polaren der Punkte einer Geraden G bilden einen Büschel, dessen Basisquadrupel die Pole der Geraden G für C^3 sind (Folgerung 2 zu Lehrsatz 2).

Die conischen Polaren der Punkte einer Tangente A von C^3 gehen durch den Berührungspunkt a derselben. Daher geht die conische Polare des Punktes p durch die Berührungs-

punkte der von p an C^3 gehenden Tangenten. Mithin gilt der Satz: *Von einem Punkte p der Ebene gehen höchstens sechs Tangenten an die C^3*, welche Schnittpunkte von C^3 mit der conischen Polare von p sind.

Lehrsatz 6. *Ein Kegelschnittnetz kann stets als das Netz conischer Polaren einer bestimmten Curve dritter Ordnung betrachtet werden.*

Um nicht weitläufig zu werden, setzen wir ein Netz voraus, dessen Kegelschnitte nicht alle durch feste Punkte gehen.

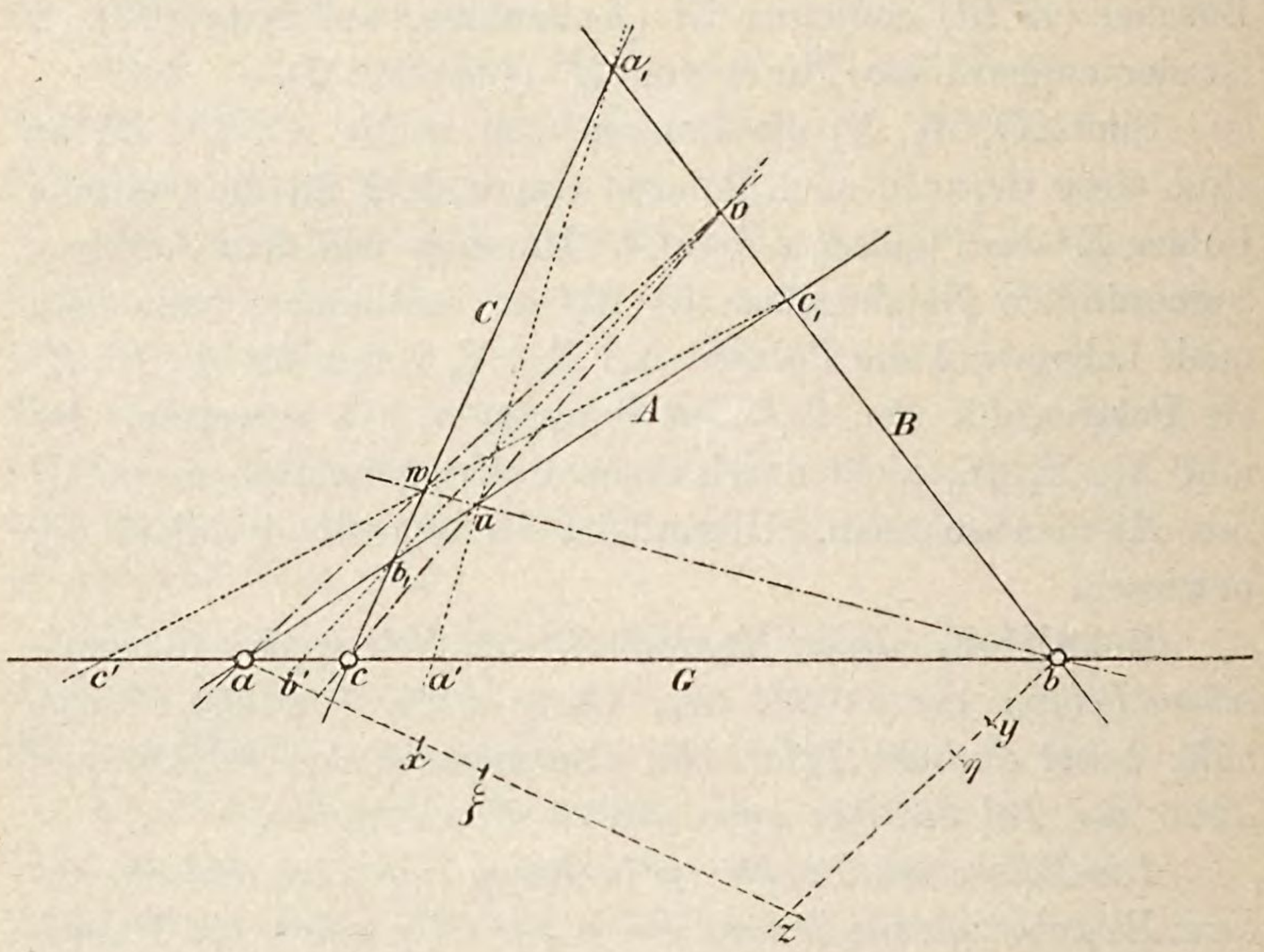


Fig. 96.

Fig. 96. Seien a, b, c drei Punkte einer Geraden G, welche auf ihren zugeordneten Kegelschnitten A^2, B^2, C^2 liegen, so mögen die Tangenten A, B, C der letzteren in a, b, c ein Dreieck $a_1 b_1 c_1$ bilden und aa', bb', cc' seien die Schnittpunkte von A^2, B^2, C^2 mit G, also Paare der Involution $\{G\}$.

Sind u, v, w die zu a, b, c im Büschel $(A^2 B^2 C^2)$ conjugirten Punkte, so ist $\overline{uv}$ Polare von a für B^2 ebenso wie die Polare von b für A^2 (Lehrsatz 2), sie geht also durch c, da $[a\,b\,c\,b']$ ein harmonisches Quadrupel ist (Lehrsatz 4). Ebenso

geht $\overline{vw}$ durch a und $\overline{wu}$ durch b. Es muss ferner u auf A, v auf B und w auf C liegen. Aus den harmonischen Eigenschaften des Viereckes $a_1 vuw$ folgt dann, da $\overline{vw}$ durch a geht, dass $\overline{a_1 u}$ durch a' gehen muss, denn $[aba'c]$ ist ein harmonisches Quadrupel. Es ist also $\overline{a_1 a'}$ Tangente von A^2, ebenso sind $\overline{b_1 b'}$ und $\overline{c_1 c'}$ Tangenten von B^2 resp. C^2.

Ist z ein vierter Punkt, der auf seinem zugeordneten Kegelschnitte Z^2 liegt, so seien X_1, X_2 seine Polaren für A^2 resp. B^2, also auch die Polaren von a resp. b für Z^2, die sich im Pole t von G für Z^2 schneiden, der zu z conjugirt im Büschel $(A^2 B^2)$ ist. Schneidet die Gerade $\overline{za}$ resp. $\overline{zb}$ die A^2 resp. B^2 in ξ resp. η und werden x, y so bestimmt, dass $[z\,\xi\,x\,a]$ und $[z\,\eta\,y\,b]$ harmonische Quadrupel sind, so liegen auch die Punkte x und y auf den ihnen zugeordneten Netzkegelschnitten (Lehrsatz 4).

Es sei C^3 die Curve dritter Ordnung, welche durch a, b, c, x, y, z geht und A, B, C zu Tangenten hat. Durch diese Bestimmungsstücke ist C^3 vollständig bestimmt (vergl. Kap. VIII, § 2, Folgerung 3 zu Lehrsatz 1, Seite 187). Es ist auch nur eine C^3 möglich, da x, y, z nicht in gerader Linie liegen. Für diese C^3 ist das Netz conischer Polaren identisch mit dem vorgelegten. Denn die conische Polare von a muss durch a' gehen und A sowie $\overline{a_1 a'}$ berühren, aber auch den Punkt ξ enthalten, ist also mit A^2 identisch, ebenso ist B^2 die conische Polare von b. Die conische Polare von z hat dann X_1, X_2 zu Polaren von a und b (vergl. den Satz auf Seite 206) und da sie durch z gehen muss, ist sie mit Z^2 identisch (vergl. die 7. Aufgabe Seite 75).

A^2, B^2, Z^2 bestimmen sowol das vorgelegte Netz, als das Netz conischer Polaren der C^3.

Aus dem eben bewiesenen Lehrsatze, aus Lehrsatz 4 und 5 und aus der Folgerung zu Lehrsatz 3 ergibt sich:

Die Curve dritter Ordnung C^3 ist der Ort der Punkte x, welche auf den ihnen zugeordneten Netzkegelschnitten X^2 liegen, und dieselbe C^3 wird eingehüllt von den Geraden A der Ebene, welche durch einen ihnen associirten Punkt a gehen.

Wir wollen noch kurz den Fall erwähnen, dass A, B, C

nicht wie vorausgesetzt wurde, ein Dreieck $a_1 b_1 c_1$ bilden, sondern sich in einem Punkte s schneiden. Dann folgt sogleich, dass u, v, w auch in s liegen müssen. Daher wird s Pol von G für A^2 und B^2, mithin ein Punkt der Tripelcurve H^3 des Netzes, G ist dem Quadrupel von $(A^2 B^2)$ associirt. Ist $\mathfrak{S}$ der s im Netze conjugirte Pol, also auf G und H^3 gelegen, so seien $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ die zwei anderen Schnittpunkte von G mit H^3 und $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ verschieden. Der zu $\mathfrak{S}'$ im Netze conjugirte Pol s' muss zum Poldreieck des Büschels $(A^2 B^2 C^2)$ gehören (Zusatz zum 7. Satze auf Seite 199), also auf G und H^3 liegen, d. h. es ist dies der Punkt $\mathfrak{S}''$, da es $\mathfrak{S}$ nicht sein kann. Die Gerade $\overline{s' \mathfrak{S}'} = G$ ist daher eine Chordale des Netzes (Kap. VII, § 2, Lehrsatz 2, Seite 167). Umgekehrt ist G eine Chordale des Netzes, dann schneiden sich die drei Tangenten A, B, C in einem Punkte der H^3.

Aufgabe. Es ist ein Kegelschnittnetz gegeben; man bestimme die Curve dritter Ordnung C^3, für welche dasselbe das Netz conischer Polaren ist. Die Lösung ergibt sich aus dem Vorhergehenden.

Lehrsatz 7. *Der Ort der Punkte $\mathfrak{S}$, deren conische Polaren für C^3 in zwei Gerade $S, \mathfrak{S}$ zerfallen, ist die Tripelcurve H^3 des Netzes conischer Polaren von C^3. $\mathfrak{S}$ und der Schnittpunkt s von $S, \mathfrak{S}$ sind conjugirte Pole im Netze.*

Jede Gerade G enthält drei Punkte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, deren conische Polaren die drei Geradenpaare des Kegelschnittbüschels sind, dessen Basispunkte die Pole der G darstellen. Ist aber $\mathfrak{S}$ ein Punkt von H^3, s der ihm im Netze conjugirte Pol, so ist s Ecke eines Tripels s, s', s'', dessen zugehöriges Quadrupel $[q]$ auf zwei durch s gehenden Chordalen liegt, welche $\mathfrak{S}$ im Netze zugeordnet sind (Anmerkung auf Seite 201).

Die Curve H^3 heisst Hesse'sche Curve der Curve dritter Ordnung C^3 oder auch Jacobi'sche Curve des Kegelschnittnetzes.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

58

J. N. Vogl.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Einleitung in die projektive Geometrie der Ebene e. Lehrbuch für höhere Lehranst. u. für d. Selbstunterricht

Leipzig 1889

Math.p. 43 wc
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650706-5